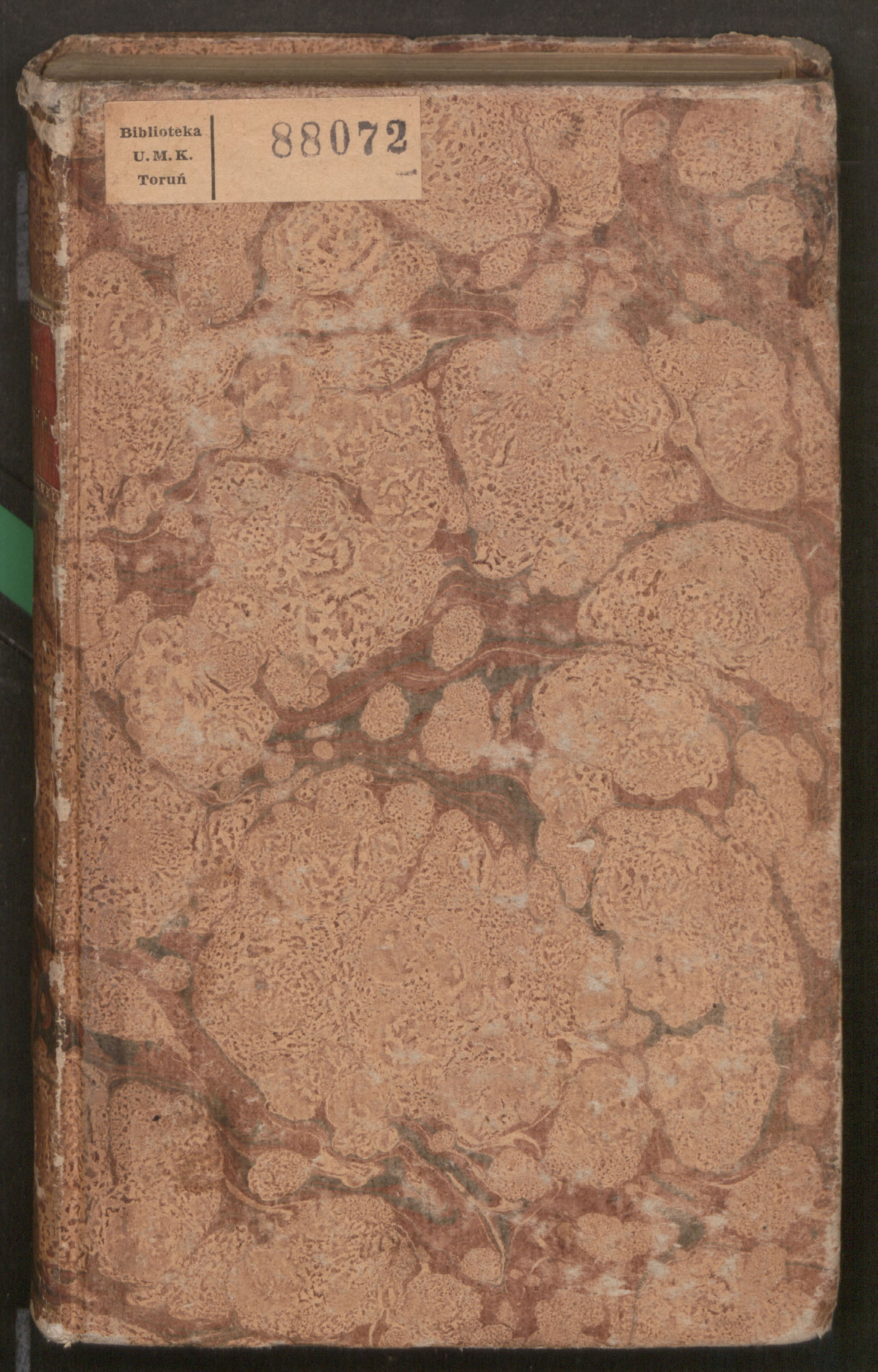
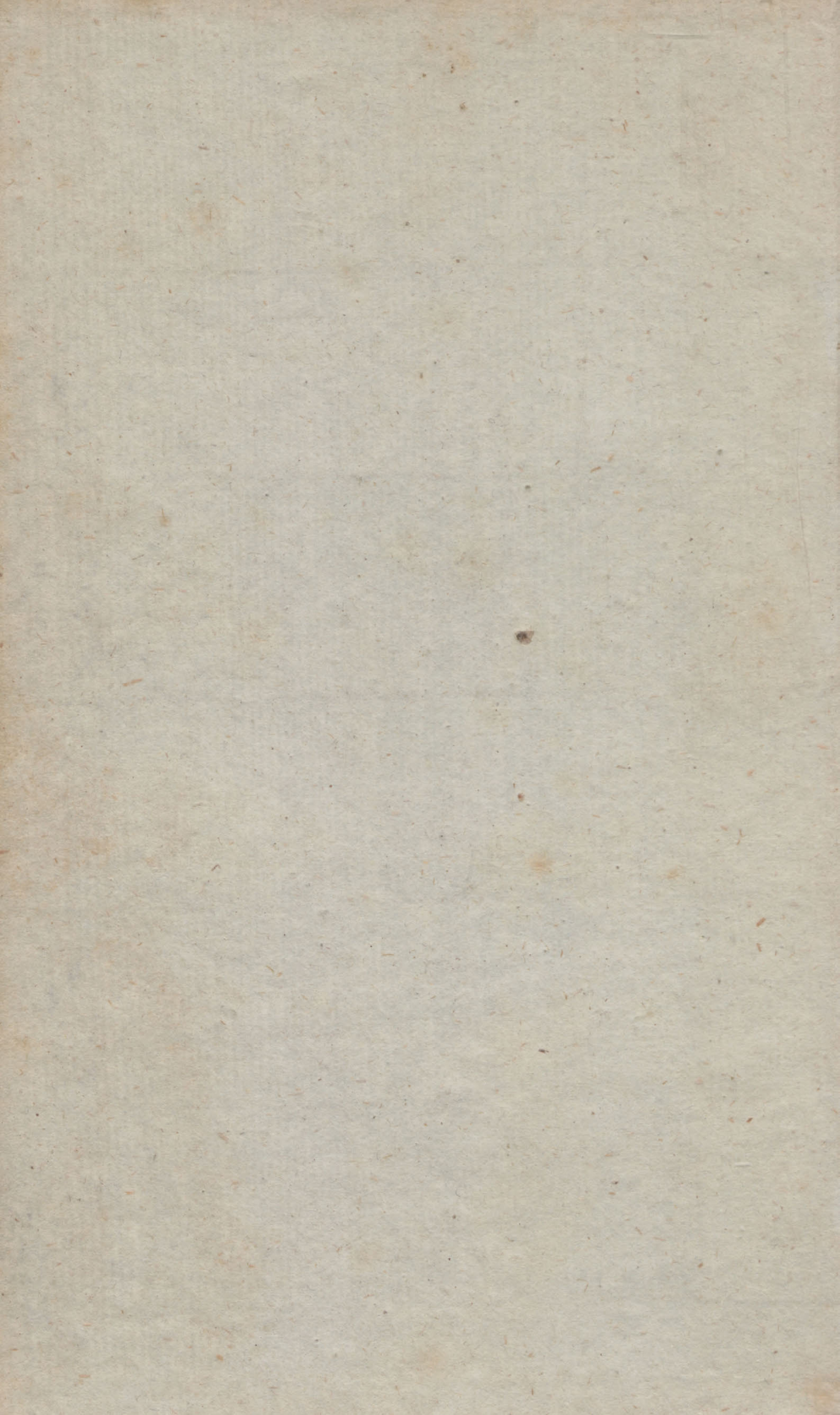
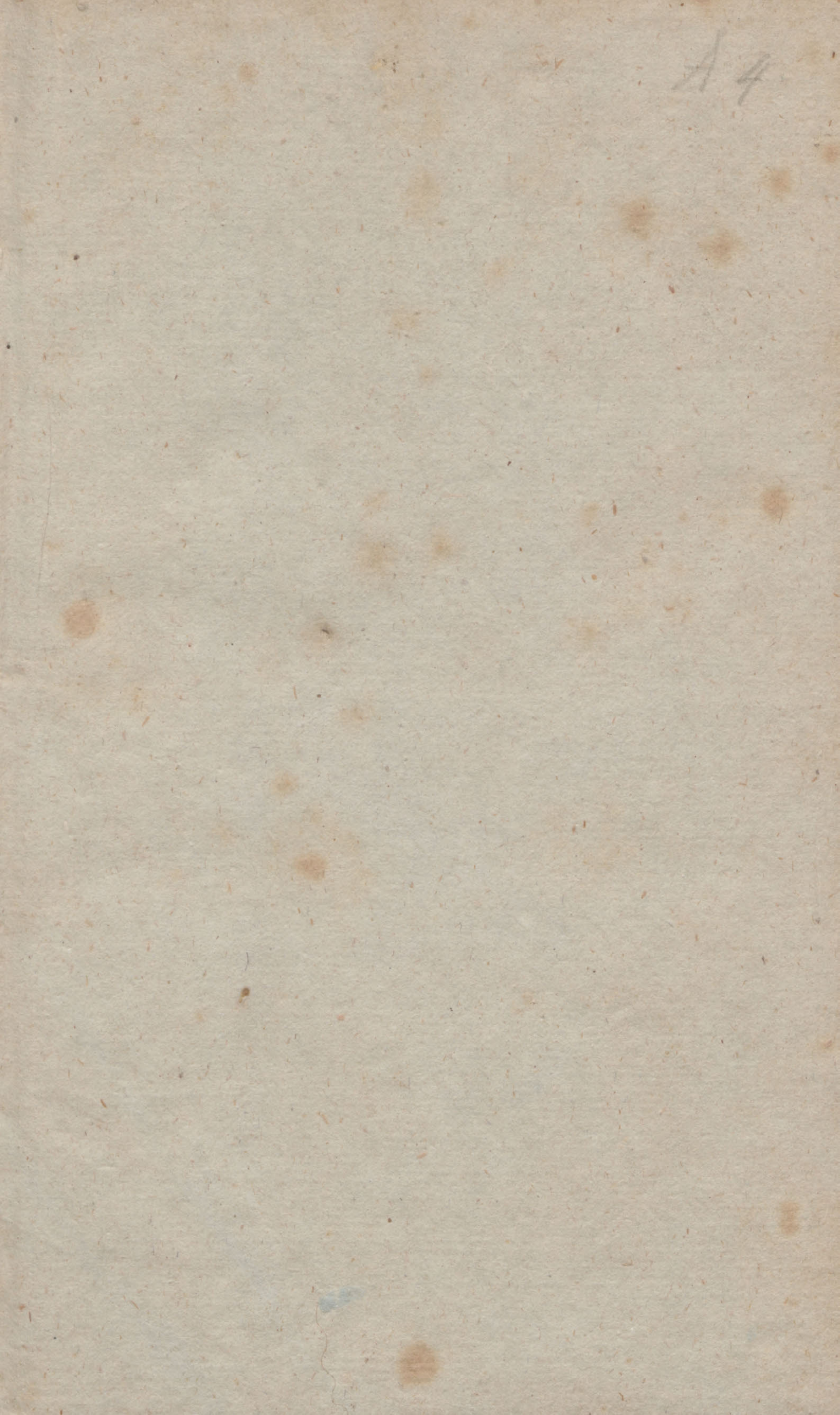
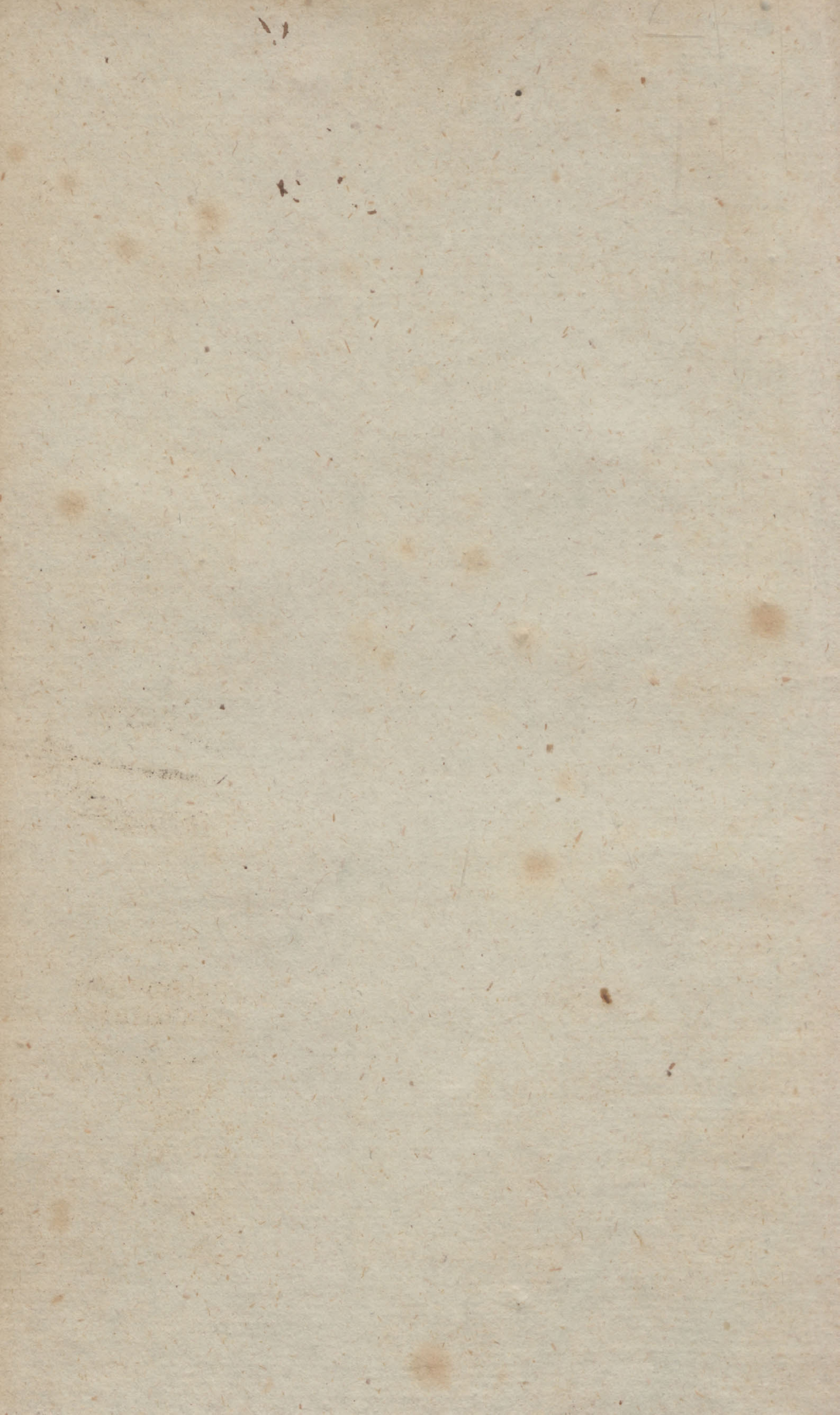








Grundriß
der
allgemeinen Arithmetik
oder
Analysis
zum Gebrauch
bey academischen Vorlesungen



entworfen
von
B. F. Thibaut
Prof. in Göttingen.



Erster Theil.

Göttingen, 1809.
Bey Heinrich Dieterich.

Vorrede.

Obschon es zunächst das lange empfundene Bedürfniß für die eigenen Vorlesungen gewesen ist, was den Verfasser zur Abfassung des gegenwärtigen Compendiums der allgemeinen Arithmetik bewogen hat, so hält er sich dennoch für berechtigt zu glauben, daß eine solche Arbeit für den jetzigen Zustand der Wissenschaft von wesentlichem Nutzen ist. Die älteren Lehrbücher lassen, in Absicht auf wahrhaft analytischen Geist, und Tiefe der Untersuchungen, Vieles zu wünschen übrig, abgesehn von dem gänzlichen Mangel combinatorischer Begriffe, die eines der wichtigsten Fundamente für die Analysis bilden. Die großen Mathematiker, denen wir ausführliche Werke über die höchsten Theile der Mathematik verdanken, haben sich mit dem wichtigsten unter allen, welcher den Uebergang von den Elementen zu jenen vermittelt, fast gar nicht beschäfftigt. Und so ist in

der Darstellung dieser Wissenschaft eine Lücke entstanden, die der Verbreitung ihres Studiums nicht anders als sehr gefährlich werden konnte.

Der Verfasser hat das Glück gehabt, durch eine sehr ausgebreitete, und ununterbrochen fortgesetzte, Erfahrung zu lernen, was zu einem Vortrage der Mathematik, welcher sich von den ersten Anfangsgründen bis zu den höchsten Theilen erstreckt, erfoderlich ist. In so fern hofft er die Form seiner Darstellung, welche in vielen Stücken von der gewöhnlichen abweichend seyn mag, in gewissem Sinne als gerechtfertigt annehmen zu dürfen. Daß es ihm angelegen gewesen sey, die Analysis von allen fremdartigen Principien zu reinigen; die Methode der Wissenschaft zu vereinfachen, und zur Deutlichkeit zu erheben; die Idee des Ganzen nicht über einzelnen Theilen aus den Augen zu lassen; bedeutende Lücken auszufüllen: wird der Inhalt des Buchs beweisen. Bey der gänzlichen Regellosigkeit, welche im Vortrage der Mathematik herrscht, die indessen dem Kenner durch pedantische Formen und Kunstgriffe nicht verhüllt bleiben kann, mag ein solches Streben Manchem überflüssig, Einigen thöricht scheinen; wer mit freyem Geiste über der

Wissenschaft schwebt, wird es, mehr oder weniger gelungen, nicht verschmähn.

Die neuere Bearbeitung der Combinationslehre ist allenthalben, wo es Natur des Gegenstandes foderte oder zuließ, benuzt worden. Aber die Terminologie und Bezeichnung der um diesen Zweig der Wissenschaft so sehr verdienten Hindenburgischen Schule ist dabey fast gar nicht angewendet worden. Selbst ein großer Theil der Lehren, welche dort als wesentlich aufgestellt werden, hat hier keinen Platz gefunden. Es wäre eine sehr interessante Aufgabe: den wahren analytischen Werth der Combinationslehre zu würdigen, und die Grenzen festzusetzen, wo sie sich auf ihr eignes Gebiet beschränken sollte; ihre Beantwortung gehört aber nicht an diese Stelle, und vielleicht ist es der Zeit vorbehalten, sie stillschweigend zu geben.

Der gegenwärtige erste Theil der allgemeinen Arithmetik befaßt die Entwicklungen derjenigen zusammengesetzten Ausdrücke, welche nach Potenzen einer einzigen Hauptgröße fortschreitend gebildet sind, nebst den Hauptsätzen der Algebra, welche als unmittelbare Folgerungen aus jenen arithmetischen Betrachtungen ange-

sehn werden können. Ein zweiter Theil wird die Formen, welche mehr als eine Hauptgröße enthalten, die damit verbundene Lehre von den Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen, nebst den wichtigsten Theoremen aus der umgekehrten Methode der Entwicklung enthalten. Vielleicht aber wird der Verfasser, dem es immer mehr zur Pflicht wird, alle Theile der Mathematik zu bearbeiten, noch früher zur Herausgabe eines Lehrbuchs über Differenzial- und Integral-Rechnung fortschreiten, und erst ganz zulezt zu einem ausführlichen Lehrbuche der höheren Geometrie übergehn.

Inhalt.

Erstes Kapitel. Ueber die Grundform der allgemeinen Arithmetik und die einfachen Rechnungsarten in Beziehung auf sie. Bildung der Grundform, 1 - 5; die vier Grundoperationen 5 - 10.

Zweytes Kapitel. Erste Grundzüge der Combinationslehre. Elemente, Formen, combinatorische Operationen, 10 - 12; Rangordnung unter den Formen, 12 - 15; Permutation 15 - 19; Zahl der Permutationsformen 19 - 21; Combination, 21 - 27; Variation, 28 - 35.

Drittes Kapitel. Nähere Entwicklung der Gesetze der Multiplication zusammengesetzter Größen. Binomischer Lehrsatz. Zurückführung des Multiplicirens auf Variation, 35 - 37; Product gleicher zweytheiliger Factoren, 37 - 43; Binomialcoefficienten, nebst einigen Beziehungen unter solchen 44 - 49.

Viertes Kapitel. Variationen zu bestimmten Summen. Gebrauch davon bey der Bildung eines Products aus Formen des ersten Grades. Factoren deren Glieder nach Potenzen der nemlichen Hauptgröße fortschreiten; Anordnung der aus ihnen entstehenden Producte, 49 - 53; Variation zu bestimmten Summen, 53 - 59; Regel für die Berechnung eines Products aus Factoren von der Form $A + x$, 59 - 67.

Fünftes Kapitel. Von der Zerfällung höherer Formen in Producte aus einfachen Factoren, oder der Auflösung von Gleichungen höherer Grade. Allgemeine Idee von Gleichungen und ihrer Auflösung, 67 - 72; Quadratische Gleichungen, 73 - 79; Cubische Gleichungen, 79 - 84; unmögliche Wurzeln, 84 - 89; nähernde Auflösung der Gleichungen höherer Grade, deren Coefficienten in bestimmten Zahlen gegeben sind, 89 - 105; Veränderung der Gleichungen durch Substitution, 105 - 112.

Sechstes Kapitel. Von der Multiplication zusammengesetzter Formen im Allgemeinen, und dem polynomischen Lehrsatz für ganze positive Exponenten. Product mehrerer Formen von der Gestalt $ax + bx^2 ..$, 113 - 117; Potenzen einer solchen

Form, durch Combination zu bestimmten Summen berechnet, 117-121; eben diese Untersuchungen für Formen von der Gestalt $ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta}..$, 121-127; allgemeine Bemerkung über die Anzahl der Coefficienten aus den Factoren, welche zur Bildung eines Coefficienten im Producte gebraucht werden, 127-130.

Siebentes Kapitel. Division zusammengesetzter Formen. Anwendung der dabey gebrauchten Methode zur Summirung gleichhoher Potenzen von den Wurzeln einer unaufgelösten Gleichung. Bestimmung des Quotienten $\frac{1}{1-\overset{1}{a}x-\overset{2}{a}x^2..}$ auf dem recurrirenden Wege, und Mechanismus dieses Verfahrens, 130-138; independentes Gesetz des nemlichen Quotienten, 138-142; des Restes welcher zu jenem gehört 142-146; recurrirende und independente Bestimmung des Quotienten und Restes, welcher sich aus $\frac{b+\overset{1}{b}x^1+\overset{2}{b}x^2..}{1-\overset{1}{a}x^1-\overset{2}{a}x^2..}$ entwickelt, 142-153; ebendasselbe für die allgemeinste Form $\frac{bx^{\alpha}+\overset{1}{b}x^{\alpha+\delta}}{ax^{\beta}+\overset{1}{a}x^{\beta+\delta}..}$, 153-160; combinatorisches Lemma für die nachfolgende Betrachtung, 160-165; Recursionsformel für die Summen gleichhoher Potenzen von allen Wurzeln einer gegebenen, aber nicht aufgelösten Gleichung, 165-167; independenter Ausdruck desselben, 167-172.

Achtes Kapitel. Ausziehung der Wurzeln. Allgemeiner Beweis des binomischen Lehrsatzes für gebrochene und negative Exponenten. Recurrirendes Verfahren, um $\sqrt[n]{(a+\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2..)}$ zu berechnen, 172-178; Hülfssatz aus der Lehre von der Multiplication, durch welchen die Allgemeinheit des binomischen Lehrsatzes für alle Exponenten bewiesen werden kann, 178-196.

Neuntes Kapitel. Der polynomische Lehrsatz für beliebige Exponenten in independenter und recurrirender Form. Independente Regel der Berechnung für $(a+\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2..)^n$, 196-204; für $(ax^{\beta}+\overset{1}{a}x^{\beta+\delta}..)^n$, 205; daraus abgeleitete recurrirende Bestimmung, 205-212; Beschränkung der Gültigkeit des Satzes, 212-219.

Zehntes Kapitel. Entwicklung der Exponenzialgrößen. Bedeutung der Exponenzialgrößen, und Zurückführung ihrer Berechnung auf den binomischen Lehrsatz, 220-225; Entwicklung der Exponenzialreihe für $(1+a)^x$, 225-238; natürliches Potenzensystem, 238-243; Entwicklung der allgemeineren Form $e^{\overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 ..}$ independent, 243-247; und recurrirend, 247-251.

Eilftes Kapitel. Entwicklung der Logarithmen oder Exponenziirung. Idee dieser Operation. Ableitung von log$(1+x)$ im natürlichen System, 251-257; von log$(1+\overset{1}{A}x+\overset{2}{A}x^2..)$, recurrirend und independent, 257-259; Zurückführung andrer Formen auf die vorhergehende, 259-261; Formeln für die Berechnung der Logarithmen gewisser Zahlen aus denen von andern, für das natürliche System, 261-267; Hülfstabelle zur leichten Berechnung natürlicher und gemeiner Logarithmen, nebst Anleitung zu deren Gebrauch, 267-276.

Zwölftes Kapitel. Theorie der Exponenzialgrößen mit unmöglichen Exponenten. Zweck der Untersuchung 276-279; Entwicklung von $e^{a\sqrt{-1}}$, und daraus hervorgehende Idee arithmetischer Formen, welche die Benennung Sinus und Cosinus einer Zahl erhalten, 279-281; Zusammenhang zwischen Sinus und Cosinus, 281-285; Beweis, daß es eine bestimmte Zahl gibt, deren Sinus 1, deren Cosinus 0 ist, 285-289; daß, wenn diese Zahl $\frac{1}{2}\pi$ heißt, nur für alle Zahlen zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ die Sinus und Cosinus bekannt zu seyn brauchen, um ebendieselben für alle übrigen positiven und negativen ohne weitere Rechnung zu bekommen, 289-295; Einführung der trigonometrischen Tafeln in die Analysis, 295-297; Beweis daß jede Zahl unendlich viele natürliche Logarithmen, und eine negative keine andre als unmögliche besitzt, 297-301.

Dreyzehntes Kapitel. Logarithmen unmöglicher Ausdrücke. Darauf gegründeter Algorithmus mit solchen Ausdrücken. Allgemeine Regel den Werth von log $(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ durch Hülfe der Tafeln zu finden, 301-307; bequemster Mechanismus für die Ausübung der arithmetischen Hauptoperationen an solchen Formen, 307-311; Allgemeinheit der Wurzel-Ausziehung, die dadurch, auch für mögliche Zahlen, erhalten wird, 311-323; Beweis daß jeder unmögliche Ausdruck auf die Form $a+b\sqrt{-1}$ zurückkommt, 324-325; allgemeine Auflösung der cubischen

Gleichungen, 325-334; der biquadratischen, 334-340; Bemerkungen über die Allgemeinheit der Regeln für die Rechnung mit Radicalgrößen, 340-346.

Vierzehntes Kapitel. Umbildung entwickelter Formen durch Substitution. Idee der Aufgabe, 346 347; Bedingungen, unter denen die Substitution einer Reihe in eine andre, eine dritte von ähnlicher Form hervorbringt, 347-350; independente Bestimmung der Coefficienten des Resultats, 350 355; Principien der recurrirenden Bestimmung, 355-359; Substitution in unentwickelten Ausdrücken, und Ableitung eines dahin gehörigen Satzes 359-364.

Fünfzehntes Kapitel. Von der Umkehrung der Reihen. Zweck dieser Operation 364-366; Bestimmung der Form, welche die, anfangs fingirte, umgekehrte Reihe erhalten muß, damit ihre Coefficienten sich unfehlbar finden lassen 366-376; recurrirende Coefficientenbestimmung für die umgekehrte Reihe, 376-380; Entdeckung des independenten Gesetzes eben dieser Coefficienten, und allgemeiner Beweis seiner Gültigkeit, 380-395; Ausnahme von der allgemeinen Regel, 395-400.

Sechzehntes Kapitel. Von den Entwicklungen die durch Umkehrung der Reihen möglich werden. Auflösung der Aufgabe: $\phi(x) = \psi(y)$ ist gegeben, man sucht $\chi(x)$, 400-406; nähere Bestimmung der Regel, für den Fall, wo y^n durch eine einzige Reihe, deren Exponenten sich in arithmetischer Progression befinden, aus der Gleichung $\phi(x) = \psi(y)$ entwickelt werden kann, 406-408; Gebrauch der Recursionsformel, um die Wurzeln jeder Gleichung mit unbestimmten Coefficienten durch Reihen auszudrücken, 408-413.

Anhang einiger Tabellen. I. Tabelle der figurirten Zahlen, 414-415; II. Tabelle für die Entwicklung einer unbestimmten Potenz eines möglichst allgemein ausgedrückten Polynomiums, die 10 ersten Glieder desselben enthaltend, 416-418; III. Tabelle zur Umkehrung einer unbestimmt ausgedruckten Reihe, 418-419.

Erstes Kapitel.

Ueber die Grundform der allgemeinen Arithmetik, und die einfachen Rechnungsarten in Beziehung auf sie.

Die Wissenschaft der Zahlen, welche Verknüpfungen mehrerer Zahlen unter einander, und Beziehungen, die aus solchen Verknüpfungen erwachsen, zum Gegenstande hat, ist von unabsehbarem Umfang; die gewöhnliche Arithmetik macht von ihr nur einen kleinen, obgleich sehr wichtigen Theil aus. Erst dann, wenn man die möglichen Arten einfacher Zahlen, und die ursprünglichen Verknüpfungen, welche sie mit einander eingehen können, kennen gelernt hat, ist man im Stande, die Idee zusammengesetzter Zahlen zu bilden, den Gesetzen der unter ihnen möglichen Verbindungen nachzuforschen, und die daraus entspringenden Beziehungen zu entwickeln. So steht mit Recht die Lehre von den vier Speciebus, und den Gleichungen des ersten Grades an der Spitze der ganzen Zahlenwissenschaft, und es wäre vielleicht, wenn man eine bestimmte Grenze ziehen wollte, am zweckmäßigsten, die Elementar-Arithmetik auf sie zu

beschränken. Dem eingeführten Gebrauche gemäß, zieht man indessen noch einen Abschnitt in das Gebiet der Elemente hinüber, welcher gewissermaßen den Uebergang zu den höheren Untersuchungen vermittelt. Die am wenigsten verwickelte Form zusammengesetzter Zahlen ist die eines Products aus gleichen Factoren, oder einer Potenz. Die Betrachtung dieser Form; ihre Zusammensetzung; die Gesetze der Verbindung einzelner von derselben Art, machen den zweyten Theil der elementarischen Arithmetik aus. Und diese Form ist es gerade, welche das Hauptelement bey der Bildung der zusammengesetzten Größen abgiebt, von denen die Analysis ausgeht, und auf die sie zurückzukommen bestrebt ist.

Die Arithmetik zeigt, in ihren decadisch gebildeten Zahlen, ein Beyspiel und Vorbild solcher Zusammensetzungen. So wie dort eine gewisse willkührliche Zahl, die man Grundzahl zu nennen pflegt, angenommen wird, um ihre successiven Potenzen als verschiedene Einheiten anzusehen, die in besonderen Theilen des ganzen Ausdrucks gezählt werden sollen, so nimt man auch hier, um die Grundform der Analysis zu bilden, eine Größe, die aber völlig unbestimmt bleibt, an, um successive Potenzen von ihr als Dinge zu betrachten, die in einzelnen verschiedenen Theilen eines zusammengesetzten Ausdrucks gezählt werden sollen. Wir wollen diese Größe die Hauptgröße nennen, und durch einen der letzten Buchstaben des Alphabets andeuten. So wie ferner

bey der Bildung decadischer Zahlen die Mengen, welche von jeder Art jener Einheiten etwa vorhanden sind, besonders angegeben, und durch die einzelnen Ziffern dargestellt werden, so fügt man auch hier den successiven Potenzen der Hauptgröße beliebige Factoren bey, die den Namen der Coefficienten erhalten, und durch die ersten Buchstaben des Alphabets angedeutet werden, wiewohl es in speciellen Fällen auch gestattet ist, bestimmte Zahlen dafür an die Stelle zu setzen. Die einzelnen, so zusammengesetzten, Producte, werden als Theile zu einem Ganzen vereint gedacht, und dem gemäß beym Schreiben durch + Zeichen verbunden. In der Folge dieser einzelnen Theile, oder Glieder, beobachtet man den Rang der in ihnen enthaltenen Potenzen, wobey man aber nach Belieben von der höchsten anfangen, und so allmälig zu den niedrigern fortgehn, oder auch die umgekehrte Ordnung eintreten lassen kann. Das erste giebt die fallende, das zweyte die steigende Anordnung einer solchen Form, und es ist eine stillschweigende Bedingung bey der Behandlung derselben, daß sie entweder auf die eine, oder die andre Art geordnet werden sollen.

Im Anfange läßt man die Potenzen der Hauptgröße nur ganze und positive Zahlen zu Exponenten haben. In der Folge erweitert sich das Gesetz dahin, daß auch negative und gebrochene Zahlen als Exponenten vorkommen dürfen. Diese Erweiterung zeigt sich sehr bald als nothwendig. Die Hauptaufgabe der Analysis ist nemlich die: man soll mit Formen, die

nach den eben angeführten Gesetzen gebaut sind, rechnen, so daß das Resultat der Rechnung als eine, dem nemlichen Gesetze unterworfene Form herauskomme. Indem man dieses, den Regeln der arithmetischen Operationen gemäß, zu leisten sucht, gehen von selbst in vielen Fällen Potenzen der Hauptgröße mit negativen oder gebrochenen Exponenten hervor, so daß man jedem Resultate entsagen müßte, wenn eine Form, in der solche enthalten sind, nicht eben so gut als andre gestattet seyn sollte. Dabey bleibt übrigens dieselbe Regel der Anordnung, und es ist unmittelbare Folge von dem, was vorher über die Rangordnung der einzelnen Glieder festgesetzt war, daß Potenzen mit negativen Exponenten für niedriger im Range angesehen werden müssen, als solche, die positive Exponenten enthalten, und zwar um desto niedriger, je größer der negative Exponent ist *a*).

In Zeichen ausgedrückt: Es mögen a, b, c, u. s. w. beliebige Zahlen vorstellen; eben so α, β, γ, u. s. w., so ist die Grundform, welche in der Analysis als einfach, und keiner weiteren Zurückführung mehr fähig angenommen wird,

$$ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + dx^{\delta} + \ldots$$

eine Form, die aber im Anfange in der einfacheren Gestalt

a) Eine aus folgenden Gliedern bestehende Form:
$6 + 8x^2 - 3x^{\frac{2}{3}} + 5x^{-3} + 7x^{-\frac{1}{2}} + 4x$, ordnet sich diesem Princip gemäß so:
$5x^{-3} + 7x^{-\frac{1}{2}} + 6 - 3x^{\frac{2}{3}} + 4x + 8x^2$.

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

aufgestellt zu werden pflegt, wobey die Coefficienten a, b, c u. s. w., jeden beliebigen Werth, auch o nicht ausgeschlossen, haben mögen.

Nach dieser vorläufigen Darstellung der Größen, woran die allgemeine Arithmetik zu operiren hat, lassen sich die ersten Grundlinien der vier einfachen Rechnungsarten ohne Schwierigkeit entwerfen.

Bey der Addition mehrerer Formen, welche nach Potenzen der nemlichen Hauptgröße geordnet sind, braucht nichts weiter zu geschehn, als eine Zusammenstellung derselben, wobey gleichhohe Glieder sich zu einander gesellen. Sie sind das Einzige, was vereinigt werden kann, und muß; man sondert die gemeinschaftliche Potenz der Hauptgröße in ihnen ab, addirt das was übrig bleibt, das heißt die Coefficienten der einzelnen Glieder, zusammen, und setzt dieser Summe jene abgesonderte Potenz der Hauptgröße wieder bey. Diese einzelnen Summen stellen von selbst eine nach successiven Potenzen derselben Hauptgröße fortschreitende Form dar, und man hat hier weniger Arbeit als bey der Vereinigung vielziffriger Zahlen, weil das Uebertragen aus einer Summe in die nächsthöhere, wegen der Unbestimmtheit der Hauptgröße, und der damit verknüpften Unbeschränktheit der Coefficienten jezt keine Statt haben kann *b*).

---

b) Die Formen: $3x^4 - 6x^3 + 8x - 2$; $5x^3 + 9x^2 + 7$; $4x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 5x + 2$, stellen und verbinden

Für das Subtrahiren ergiebt sich dieselbe Vorschrift. Minuend und Subtrahend so zusammengestellt, daß gleichhohe Glieder in beyden sich einander zugesellen; die gleichhohe Potenz der Hauptgröße aus zwey solchen Gliedern abgesondert; vom Coefficienten des einen, den des andern abgezogen; dem Reste die vorher abgesonderte Potenz der Hauptgröße wieder beygefügt. So entstehn für die gesuchte Differenz einzelne Glieder, nach den successiven Potenzen der Hauptgröße von selbst fortschreitend c).

Die Multiplication hat es hier mit Factoren zu thun, die sich aus Theilen zusammensetzen. Man muß also allmälig jeden Theil des Multiplicands nehmen, um ihn successiv durch jeden Theil des Multi-

---

sich in der Addition so:

$$\begin{array}{l} 3x^4 - 6x^3 \;\; * \;\; + 8x - 2 \\ \qquad\quad 5x^3 + 9x^2 \;\; * \;\; + 7 \\ 4x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 5x + 2 \\ \hline 7x^4 + 7x^3 + 15x^2 + 3x + 7. \end{array}$$

Das Zeichen * dient wie die o in der Arithmetik, zur Erhaltung der Ordnung.

c) Die Formen: $5x^3 - 7x^2 + 8x - 6$ als Minuend, und $-6x^3 + 4x^2 + 10x - 8$ als Subtrahend, gehen im Subtrahiren so zusammen:

$$\begin{array}{l} 5x^3 - 7x^2 + 8x - 6 \\ -6x^3 + 4x^2 + 10x - 8 \\ \hline 11x^3 - 11x^2 - 2x + 2. \end{array}$$

Der Ungeübte pflegt wohl über die Zeichen der Glieder im Subtrahend, die umgekehrten Zeichen zu schreiben, und sie so zu denen des Minuend hinzuzuaddiren.

plicators zu multipliciren, und die Producte in eine Summe zusammenziehen. Die einzelnen Theile aus beyden, die sich jedesmal mit einander multipliciren; sind in der Regel selbst Producte aus zwey Factoren: dem Coefficienten, und einer Potenz der Hauptgröße. Indem man ein Paar solche Producte mit einander multiplicirt, wird man hier im Zusammenstellen ihrer Factoren die Ordnung befolgen, daß die beyden Potenzen der Hauptgröße sich in der Multiplication vereinigen, und eine dritte Potenz eben dieser Größe bilden, die, nach der bekannten Regel, die Summe der Exponenten, welche in den sich multiplicirenden Potenzen lagen, zu dem ihrigen bekommt, und daß eben so das Product der beyden Coefficienten als eine einzige Größe gedacht, jener Potenz zum Coefficienteu wieder beygegeben wird. Die einzelnen Producte, welche auf diese Art entstehn, müssen hernach so durch Addition vereinigt werden, daß alle die, welche einerley Potenz der Hauptgröße enthalten, zu einem Gliede zusammenfließen. Es muß also bey ihrer Bildung eine feste Ordnung beobachtet werden, die das vollständige Hervorgehn, und die nothwendige Zusammenstellung der zusammen gehörigen Producte mit sich bringt. Man kann zu dieser Absicht zwar Anfangs dasselbe Verfahren vorschreiben, welches bey der Multiplication vielziffriger Zahlen befolgt zu werden pflegt *d*), indessen wird dadurch sehr wenig von

d) In dieser Art bildet sich das Product der Formen $4x^3 - 7x^2 + 8x - 2$, und $2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ auf

dem geleistet, was bey einer vollständigen Einsicht in den Gang der Operation gefodert werden darf. Es ist nicht genug, alle Glieder des Products sicher finden zu können; man muß von jedem einzelnen, ohne sich mechanisch bis zu ihm hinabzurechnen, und es dann empirisch zu betrachten, zum Voraus angeben können, auf welche Art es gebildet ist, das heißt, was für Glieder aus den Factoren, und in welcher Verknüpfung sie genommen werden müssen, um jedes beliebige Glied des Products zu erhalten. Zu dieser Absicht sind vorläufige allgemeine Untersuchungen über die Ordnung bey dem Zusammenstellen gegebener Dinge unentbehrlich, und wir werden deswegen sogleich zu ihnen fortschreiten.

Bey der Division, wo der Dividend als ein Product zweyer nach Potenzen der Hauptgröße fortschreitender Formen gegeben ist; die eine von diesen, al[s] Divisor, gleichfalls als bekannt angenommen werden darf; die andre aber, als Quotient, erst gefunden werden soll, kann der, aus der Multiplication bekannte Satz: das höchste oder niedrigste Glied ei-

---

folgende Art:

$$4x^3 - 7x^2 + 8x - 2$$
$$2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$$

$4x^3 - 7x^2 + 8x - 2$ mit $+1$ multiplic.

$-20x^4 + 35x^3 - 40x^2 + 10x$ mit $-5x$ —

$12x^5 - 21x^4 + 24x^3 - 6x^2$ mit $+3x^2$ —

$8x^6 - 14x^5 + 16x^4 - 4x^3$ mit $2x^3$ —

$$8x^6 - 2x^5 - 25x^4 + 59x^3 - 53x^2 + 18x - 2$$

nes Products erwächst aus den höchsten oder niedrigsten Gliedern seiner Factoren, gehörig angewandt, dienen, alle einzelnen Theile des Quotienten nach der Ordnung zu finden. Man dividire, nachdem beyde auf gleiche Weise geordnet sind, das erste Glied des Dividend durch das erste des Divisors, und man wird das erste Glied des Quotienten erhalten. Man berechne das Product aus ihm in den ganzen Divisor und ziehe es vom Dividend ab; alsdann hat man ein Stück des Dividend herausgehoben, und für sich der Division unterworfen, folglich einen Theil des Quotienten gefunden. Der übrig bleibende Rest muß auch noch dividirt werden; man verfahre mit ihm, wie mit dem anfänglichen Dividend, und man wird einen neuen Theil des Quotienten erhalten. Auf dieselbe Weise fortschreitend, bekommt man allmälig die successiven Glieder des Quotienten, und findet ihn vollständig, wenn anders der Dividend würklich das Product zweyer nach Potenzen der Hauptgröße geordneter Formen gewesen ist *e*). Im gegentheiligen Falle

---

e) So findet sich bey der Division von $16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$ durch $4x^2 - 4x + 1$, der Quotient folgendermaßen:

$$
\begin{array}{r|l|l}
4x^2 - 4x + 1 & 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1 & 4x^2 - 4x \\
 & \underline{16x^4 - 16x^3 + 4x^2} & + 1 \\
 & \quad - 16x^3 + 20x^2 - 8x + 1 & \\
 & \quad \underline{- 16x^3 + 16x^2 - 4x} & \\
 & \qquad\qquad 4x^2 - 4x + 1 & \\
 & \qquad\qquad \underline{4x^2 - 4x + 1} &
\end{array}
$$

schließt sich die Operation nicht; es bleibt immer ein Rest zurück, und zeigt eben dadurch die Unmöglichkeit, den Quotienten in der verlangten Form darzustellen.

Auch bey diesem Mechanismus bleibt Vieles zu fragen übrig. Vermöge seiner allein kann man nicht für jedes Glied des Quotienten und des Restes zum Voraus bestimmen, aus was für Gliedern des Dividend und Divisor, und wie aus ihnen, sie sich bilden werden. Die Division treibt uns also gleichfalls zu einer genaueren Entwicklung der Begriffe und Regeln, welche auf die Ordnung im Zusammenstellen gegebener Dinge Beziehung haben.

Zweytes Kapitel.

Erste Grundzüge der Combinations-Lehre.

Die Combinationslehre ist die Wissenschaft der Ordnung, welche bey den verschiedenen Arten der Zusammengesellung gegebener Dinge beobachtet werden kann.

Die einzelnen Dinge selbst, auf deren Größe oder sonstige Beschaffenheit es durchaus nicht ankommt, werden auf die allgemeinste Art dadurch bezeichnet, daß man sie zählt, indem sie gegeben werden, und jedes von ihnen bloß durch die Zahl andeutet, welche angiebt, das wievielste es dabey gewesen ist. Diese Zahlen werden alsdann bey den Zusammen-

stellungen als Stellvertreter jener Dinge gebraucht, und in so fern selbst Elemente genannt. Man bedient sich auch wohl statt ihrer andrer Zeichen, bey denen man schon gewohnt ist, eine unabänderliche Folge zu beobachten, z. E. der Buchstaben, indessen ist eine solche Bezeichnung weder wissenschaftlich noch allgemein. Sollten unter den gegebenen Dingen mehrere seyn, die bey der Zusammengesellung für identisch gelten müßten, so daß der gegenseitige Austausch derselben keine Aenderung hervorbringen könnte, so wird man bey der anfänglichen Bezeichnung jedes von ihnen durch eben dieselbe Zahl andeuten.

Eben so unbestimmt muß auch der Begriff der Zusammengesellung jener Elemente gefasst werden. Ob eine würkliche Verknüpfung unter ihnen getroffen werden soll, und von welcher Art sie seyn wird, davon abstrahirt man gänzlich; das unmittelbare Folgen der einzelnen Elemente nach einander, welchem ein Nebeneinander-Setzen derselben beym Schreiben entspricht, gilt als das Zeichen ihrer combinatorischen Verbindung. Der Inbegriff mehrerer zusammengestellter Elemente wird Form oder Complexion genannt.

Bey jeder combinatorischen Operation gehen aus den gegebenen Elementen mehrere Formen hervor, welche eine nach der andern angegeben werden müssen. Nimmt man nur eine Reihe gegebener Elemente an, so lassen sich in Beziehung auf sie nur zwey Arten ursprünglicher Zusammenstellungen denken. Entweder treten alle Elemente zugleich in die Form ein, und

dann kann es bloß Aenderung ihrer gegenseitigen Folge seyn, wodurch sich die eine Zusammenstellung von der anderen unterscheidet; oder es sollen jedesmal nur einige von jenen Elementen zusammengefaßt werden, und alsdann läßt sich, ohne Rücksicht auf die Folge der einzelnen Elemente, bloß dadurch eine Unterscheidung der Formen machen, daß die eine nicht durchaus dieselben Elemente enthalten darf, als die andre. Das vollständige Aufsuchen aller Formen bey der ersten Voraussetzung wird Permutiren genannt; bey der zweyten Combiniren im strengeren Sinn. Eine Verbindung von beyden Operationen, wo man erst combinirt, und hernach jede Form permutirt, welche man gemeiniglich als eine dritte einfache combinatorische Operation unter dem Namen des Variirens aufzuführen pflegt, ist offenbar schon abgeleitet, und kann höchstens als eine zusammengesetzte betrachtet werden.

Es sey indessen eine solche Operation einfach oder nicht, so müssen allemal feste Regeln gefunden werden nach denen sich alle möglichen Formen, mit Ausschluß jeder überflüssigen, darstellen lassen. Diese Regeln können nur auf einer bestimmten Ordnung beruhen, in welcher man allmälig die Elemente in die einzelnen Formen zusammenfügt. Und diese Ordnung wird ohne Zweifel die vollkommenste seyn, wenn selbst die einzelnen Formen, welche bey der Operation allmälig hervorgehn, in Absicht auf ihre Folge, eine in sich selbst erkennbare Gesetzmäßigkeit beobachten. So

wie es unter den einzelnen Elementen einen Rang giebt, und sich frühere oder niedrigere, von späteren oder höheren von selbst unterscheiden, eben so, und aus dem nemlichen Grunde giebt es auch einen Rang unter den Complexionen, welche sich durch ihre Zusammenstellung erzeugen. Eine Verbindung wird unfehlbar die niedrigste heissen müssen, wenn man die niedrigsten Elemente, welche man in seiner Gewalt hat, so lange setzt, als man kann; bey der Vergleichung zweyer Formen, wird man also diejenige höher nennen müssen, in welcher, früher als in der andern, ein höheres Element gesetzt worden ist, und es bedarf nur dieser Annahme, um allen Formen, die sich aus gegebenen Elementen gebildet haben, ihre Folge nach einander anzuweisen. Man kann indessen, wenn unter solchen Formen mehrere vorhanden sind, die sich durch die Anzahl der überhaupt in ihnen enthaltenen Elemente unterscheiden, oder zu verschiedenen Classen gehören, diesen Umstand zu einem vorläufigen Unterscheidungsgrunde machen, und ihm gemäß die Art, wie die successiven Stellen jeder Form besetzt sind, alsdann erst zu ihrer ferneren Anordnung benutzen, wenn man sie schon vorher so gesondert hat, daß die, welche zu einer niedrigern Classe gehören, früher, als die übrigen, zur Betrachtung gezogen werden. Die Anordnung mehrerer Formen, wobey man schlechthin nur darauf sieht, ob sich früher oder später bey der Besetzung gleichhoher Stellen ein Unterschied zeigt, und ob derselbe da, wo er Statt findet, mehr

oder minder beträchtlich ist, pflegt die lexicographische genannt zu werden; sollen aber, ehe sie angewendet wird, erst die Formen, nach der Menge von Elementen, die in ihnen liegen, in verschiedene Classen gestellt werden, so pflegt sie die arithmographische zu heissen. Beyde Benennungen sind freylich nur von einzelnen Beyspielen hergenommen. Für Formen, die alle zu derselben Classe gehören, fallen lexicographische und arithmographische Anordnung zusammen. Diesen Erklärungen gemäß wird das Ordnen einer gegebenen Menge von Formen sich folgendermaßen vollziehn lassen. Man werfe alle Formen, die das nemliche Anfangselement haben, in eine Gruppe zusammen, und lasse diese Gruppen nach dem Range der Aafangselemente auf einander folgen. In jeder von ihnen sondre man wieder diejenigen ab und zusammen, welche in der zweyten Stelle gleiche Elemente haben, und lasse diese kleineren Gruppen nach dem Range der in ihren zweyten Stellen befindlichen Elemente sich nach einander reihen. Und auf diese Weise schreite man fort, Formen, die bis zu einer gewissen Stelle hinauf lauter gleiche Elemente befassen, nach der Verschiedenheit derjenigen, welche in ihnen die nächstniedrigere Stelle einnehmen, aneinanderzureihen. Man wird endlich dabey bis auf die lezten Stellen kommen, und alsdann nehmen die Formen ihre unabänderliche Ordnung nach der Höhe des Elements an, welches die lezte Stelle besetzt. Soll lexicographisch geordnet werden, so setzt man so-

gleich, ohne sich an die Verschiedenheiten in der Menge von Elementen bey den einzelnen Formen zu kehren, die obigen Regeln in Anwendung; soll es arithmographisch geschehn, so scheidet man zuvor die Formen nach der Zahl von Elementen, die in ihnen liegen, in Classen, und verfährt dann mit jeder Classe, wie vorhin *f*). Auf die eine, oder die andre Weise, sollen auch im Folgenden alle Formen jederzeit geordnet erscheinen.

I. Die erste combinatorische Operation ist das Permutiren, wo man alle in einer gegebenen Menge

---

f) Die Form: 2134, 123, 321, 1432, 15, 1243, 134, 22, 32, 13, 35, 4, 243, werden sich, bey lexicographischer Ordnung, erst so gruppiren:

123, 1432, 15, 134, 13 | 2134, 2143, 22, 243 | 321, 32, 35 | 4
alsdann so

123, 134, 13, 1432, 15 | 2134, 2143, 22, 243 | 321, 32, 35 | 4
alsdann

123, 13, 134, 1432, 15 | 2134, 2143, 22, 243 | 32, 321, 35 | 4
und in der letzten Folge völlig geordnet seyn; arithmographisch hingegen kämen sie so nach einander zu stehn:

4 | 13, 15, 22, 32, 35 | 123, 134, 243 321 | 1432, 2134, 2143. |
Das Umsetzen der ersten Anordnung in die zweyte ist sehr leicht. Man durchläuft lexicographisch geordnete Formen, bloß diejenigen successiv heraushebend, welche sich auf dieselbe Classe beziehen, ohne übrigens die Folge dieser Formen zu ändern, alsdann stellen sie sich von selbst arithmographisch. Aber nicht so leicht ist das umgekehrte Verfahren, arithmographisch geordnete Formen in lexicographisch auf ein ander folgende umzustellen; sie kommt beynahe auf das ursprünglich ordnende Verfahren zurück.

liegenden Elemente nimt, um ihre Folge auf jede mögliche Art zu verändern. Dabey kann ausser dem einfachsten Falle, wo jedes der gegebenen Elemente als verschieden von den übrigen gedacht, und dem gemäß bezeichnet wird, auch noch der eintreten, daß mehrere unter diesen Elementen als identisch angesehen werden sollen, so daß eine Verwechslung derselben keinen Unterschied hervorbringen soll, in welchem Fall sie mit demselben Zeichen angedeutet werden müssen. Es werde nun das Eine oder das Andre angenommen, so bleibt dabey die Nothwendigkeit, daß verschiedene Formen solche heissen sollen, bey denen würklich verschiedene Elemente nicht durchaus die nemlichen Stellen einnehmen; es wird also möglich seyn, diese Formen als verschieden im Range anzunehmen, und dem gemäß eine Ordnung unter ihnen festzusetzen, ja man wird durch die Vorstellung dieses Ranges sie allmälig, eine aus der andern, abzuleiten im Stande seyn. Die niedrigste unter allen diesen Formen findet sich leicht; man setzt nur die gegebenen Elemente in natürlicher Folge nach einander. Aus jeder Form die nächsthöhere abzuleiten, hat eben so wenig Schwierigkeit; man sucht die späteste Stelle der Form auf, in welche, ohne die früheren zu berühren, etwas Höheres gesetzt werden kann, als würklich in ihr steht. Dieses Höhere muß also aus einer noch späteren Stelle der vorliegenden Form herrühren. Sollten solcher noch spä-

teren Stellen, die etwas Höheres enthielten, mehrere seyn, so nimt man aus ihnen das Element, welches sich am wenigsten über jenes anfängliche erhebt, um es für dasselbe an den Platz zu setzen. Bleibt nur der ganze frühere Theil der Form unberührt, so ist schon durch diesen Act eine Erhöhung der Form vorgegangen, wie auch das herausgeworfene Element nebst den in dem folgenden Theile der Form befindlichen in die nachfolgenden Stellen gesetzt werden mag. Man wird aber alle diese Elemente jedesmal in natürlicher Ordnung nacheinander zu reihen haben, damit die Erhöhung so wenig als möglich betrage *g*). Dieser Regel zufolge kann man, von der niedrigsten Form ausgehend, allmälig jede successiv höhere aus der unmittelbar vorhergehenden ableiten, und so endlich alle finden.

Es giebt aber zwischen Permutationsformen noch eine andre Verwandschaft, als die des Ranges oder der Coordination. Es mögen aus gewissen Elementen schon alle möglichen Formen gebildet seyn. Sie zerfallen von selbst in mehrere Arten oder **Ordnungen**, wenn zu der nemlichen Ordnung alle die gerechnet werden sollen, welche dasselbe Anfangs-Element besitzen. Sondert man bey Formen der nemlichen Ordnung das Anfangselement ab, so bleiben Formen übrig, die aus den andern Elementen gebildet sind,

---

g) So folgt auf die Form 423511, 425113, 425131, 425311, 431125, u. s. w.

und zwar alle, die sich aus ihnen bilden lassen. Daher die Regel: um alle Formen zu erhalten, die ein gewisses Element an der Spitze führen, werfe man dieses aus der Reihe der gegebenen weg, permutire die übrigen, und stelle den dadurch entstandenen Complexionen jenes Element wieder vor. Indessen lässt sich dies Verfahren nur dann auf eine einfache Art durchführen, wenn die Elemente alle von einander verschieden sind, so daß sie alle auf gleiche Weise in den Formen erscheinen. Alsdann sieht man allmälig jedes folgende Element als neu hinzugekommen zu den vorhergehenden an, und setzt es anfangs allen den Formen vor, die sich aus diesen schon gebildet haben. Dadurch erhält man alle diejenigen Complexionen, welche jenes Element an der Spitze führen. Wenn man in diesen das Anfangs-Element mit dem nächstniedrigern vertauscht, so erhält man alle Formen der nächstniedrigern Ordnung, und, wenn man so mit dem Vertauschen fortfährt, gehen allmälig alle Ordnungen von der höchsten bis zur niedrigsten hervor *h*). Aber dies Ver-

h) Um die Permutationen der Elemente 1, 2, 3, 4 zu erhalten, setzt man erst 1; alsdann, indem 2 hinzukommt, 21, 12; darauf, insofern 3 hinzukommt, 321, 312; 231, 213; 132, 123; endlich, weil sich noch 4 dazugesellt, 4321, 4312, 4231, 4213, 4132, 4123; 3421, 3412, 3241, 3214, 3142, 3124; 2431, 1413, 2341, 2314, 2143, 2134; 1432, 1423, 1342, 1324, 1243, 1234. Man übersieht die Formen am leichtesten, wenn man sie alle vertical unter einander setzt, hat dabey auch die Bequemlichkeit, daß die

fahren läßt sich bey Elementen, unter denen mehrere gleiche vorkommen, nicht gebrauchen, ist also insofern nur als speciell zu betrachten.

Man kann, auch ohne die Permutationsformen vollständig zu bilden, ihre mögliche Anzahl zum Voraus bestimmen. Am leichtesten geschieht es, wenn die Elemente durchaus von einander verschieden sind. Man habe die Formen, welche aus einer gewissen Menge von Elementen möglich sind, schon gebildet. Kommt ein neues hinzu, so erscheinen diese Formen, das neue an der Spitze, sämtlich wieder, bilden aber so nur eine Ordnung zusammengesetzterer Complexionen, und wiederholen sich für jedes der vorhergehenden Elemente, indem es durch Vertauschung allmälig an ihre Spitze gelangt. Man bekommt also die Zahl der vorigen Formen so oft, als Elemente vorhanden sind, das neu hinzugekommene mitgerechnet; kürzer: die Zahl der schon vorher vorhandenen Formen multiplicirt sich, so oft ein neues hinzukommt, mit der Anzahl aller vorhandenen Elemente. Nun aber ist diese Zahl Eins, wenn nur ein Element vorhanden ist, sie wird also allmälig ein Product aller ganzen Zahlen von Eins an, bis zu derjenigen hinauf, welche anzeigt, wieviel Elemente überall vorhanden sind. In Zeichen: Ist n die Zahl der vorhandenen Elemente, so ist 1 . 2 . 3 ... n

---

höchste Ordnung der neuen Formen, die durch Hinzufügung eines folgenden Elements entstehen, durch bloßes Vorsetzen dieses neuen Elements vor die schon vorher gebildeten Formen erhalten werden kann.

die Menge der aus ihnen möglichen Permutationsformen.

Sind aber unter den Elementen mehrere einander gleiche, so findet sich die Menge der Formen nur mittelbar. Es mögen alle diese Formen würklich vorhanden seyn. Jede von ihnen, wenn sich die unter einander gleichen Elemente in lauter verschiedene verwandelten, könnte alsdann noch so viel neue Gestalten annehmen, als sich durch Versetzung jener, so eben verschieden gewordener Elemente, untereinander, ohne Berührung der übrigen ableiten ließe. Man multiplicire also die Zahl der anfänglich vorhandener Formen mit der Permutationszahl der kleineren Menge, welche jetzt in ihr gleiche Elemente enthält, und man wird erfahren, wieviel Formen aus allen gegebenen Elementen, wenn keine einander gleiche darunter wären, gebildet werden könnten. Aber diese volle Permutationszahl ist schon anderweitig bekannt, kann also rückwärts dienen, die gesuchte zu finden. Man dividire sie durch die Permutationszahl der Menge, welche die vorhandenen gleichen Elemente zählt, und der Quotient wird anzeigen, wie viele Formen, unter Beybehaltung dieser gleichen Elemente möglich sind. In Zeichen: Sind n Elemente vorhanden, so ist $1.2.3\ldots n$ ihre volle Permutationszahl. Sind aber unter diesen Dingen m einander völlig gleiche, also $1.2.3\ldots m$ deren Permutationszahl, so wird $\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3.m}$ die Menge der möglichen Formen seyn. Sollten mehrere verschie-

dene Arten gleicher Elemente vorhanden seyn, so hat man aus demselben Grunde mit der Versetzungszahl, die jeder von diesen kleineren Mengen für sich zukommt, zu dividiren: Sind unter n Dingen p gleiche einer gewissen Art, und q gleiche einer andern Art, die übrigen von ihnen und unter sich verschieden, so ist $\frac{1.3 \ldots n}{1.2 \ldots p . 1.2 \ldots q}$ die Anzahl der möglichen Complexionen.

II. Combiniren im eigentlichen Sinne heißt aus einer gegebenen Reihe von Elementen eine bestimmte Zahl ausheben, und davon eine Zusammenstellung machen, so daß nur die Formen als verschiedene angesehn werden, welche nicht durchaus die nemlichen Elemente in sich fassen. Es versteht sich, daß auch hier alle möglichen Formen gefodert werden. Es können übrigens unter den Elementen mehrere einander gleich, sie können auch sämtlich verschieden seyn. Das Zeichen C soll im Folgenden den Inbegriff gewisser Combinationsformen andeuten, und ein über dasselbe gesetzter Anzeiger den Grad der Classe bestimmen, wozu die Formen gehören sollen. $\overset{4}{C}$ z. E. bedeute alle Combinationen zu je 4, die aus gewissen Elementen möglich sind.

Da es bey Combinationsformen auf die Folge der zusammengestellten Elemente nicht ankommt, und Aenderung derselben keine verschiedenen Formen hervorbringt, so darf man sich das Einfachste in dieser Absicht zur

Regel erwählen. Die Elemente sollen in jeder Combinationsform die natürliche Ordnung beobachten, so daß nie ein höheres vorangeht, und ein niedrigeres nachfolgt.

Uebrigens muß bey den Elementen ausdrücklich angegeben werden, wie oft jedes von ihnen vorkommt, denn, obgleich die Operation selbst immer dieselbe bleibt, so hat man doch bey ihrer Zusammenfügung in die Formen darauf Rücksicht zu nehmen.

Es sey nun eine gewisse Reihe von Elementen gegeben, und es werde gefodert, alle Combinationen einer bestimmt vorgeschriebenen Classe aus ihnen zu bilden. Hier sind, wie bey der Permutation, wieder zwey Wege möglich, der eine auf Coordination, der andre auf Subordination der Formen gegründet.

Bey dem ersten beginnt man mit der niedrigsten Form, jede Stelle folglich so niedrig besetzend als man darf. So lange also noch ein früheres Element wiederholt werden kann, ist es nicht erlaubt, ein späteres zu setzen. Sind alle Elemente verschieden, so setzt man sie in natürlicher Ordnung, bis die Menge der Classe erreicht ist. Um aus einer gegebenen Form die nächsthöhere abzuleiten, sucht man die späteste Stelle auf, in welche aus den gegebenen Elementen ein höheres gesetzt werden kann, als in ihr steht; setzt das am wenigsten höhere in diese Stelle, und füllt alle folgenden so niedrig als möglich aus. Dieses Ausfüllen muß nach Maaßgabe der vorhandenen Elemente geschehn, aber allemal unfehlbar so, daß keine Unordnung dabey entsteht; also nie in der Form ein niedri-

geres Element auf ein höheres folgt. Sind daher noch Elemente vorhanden, die dem nun hineingesetzten gleich sind, so besetzt man mit ihnen die folgenden Stellen so lange man darf, und überhaupt folgende Stellen so lange mit dem nemlichen Elemente, als die vorgeschriebene Wiederholbarkeit desselben gestattet, ehe man zu dem nächsthöheren fortschreitet, um mit ihm dasselbe Verfahren zu wiederholen. Diese Arbeit ist freylich in den beyden äussersten Fällen am leichtesten zu verrichten. Bey unbedingter Wiederholbarkeit füllt man alle folgenden Stellen mit demselben Elemente aus, welches zu Erhöhung in eine gewisse vorhergehende gesetzt worden war; bey durchaus verbotener Wiederholung mit lauter verschiedenen, so wie sie in natürlicher Ordnung auf das, der Erhöhung wegen hineingesetzte Element, und auf einander folgen. Indessen bleibt die Operation selbst in allen Fällen die nemliche, und nur die verschiedene Beschaffenheit der Dinge woran sie vollzogen werden soll, modificirt ihren, immerfort auf demselben Grunde beruhenden Gang *i*).

---

i) Sie ist z. E. $\overset{4}{C}$ (1,1,1,2,2,3) = 1112, 1113, 1122, 1123, 1223; eben so $\overset{3}{C}$ (1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4,5,5,5) = 111, 112, 113, 114, 115, 122, 123, 124, 125, 133, 134, 135, 144, 145, 222, 223, 224, 225, 233, 234, 235, 244, 245, 255, 333, 334, 335, 345, 355, 444, 445, 455, 555; so ist $\overset{4}{C}$ (1,2,3,4,5) = 1234, 1235, 1245, 1345, 2345.

Aus dem Combiniren an Elementen, die sich wiederholen dürfen, eine ganz andre Operation zu ma-

Eben so leicht bietet sich die Möglichkeit und die Methode eines von niedrigern Formen zu höheren aufsteigenden Verfahrens dar. Man habe aus gegebenen Elementen alle Complexionen schon gebildet, welche einer gewissen Classe angehören. Setzt man einer solchen Complexion noch ein Element zu, ohne sonst dadurch eine Bedingung der Operation zu verletzen, so entsteht aus ihr eine Complexion der nächsthöheren Classe. Nimt man alle mögliche Formen einer gewissen Classe, um jeder von ihnen jedes der gegebenen Elemente beyzufügen, in sofern es die Bedingungen der Operation selbst erlauben, und sich dabey keine identische Formen einstellen, so muß man auf diese Art alle Complexionen der nächsthöheren Classe erhalten. Dieses Beyfügen geschieht am schicklichsten durch Stellung an die Spitze, da es für jede Complexion doch nur einmal geschehn darf. Dabey werden sich die Bedingungen der Operation am leichtesten befriedigen lassen. Je-

---

chen, als aus demjenigen, wobey kein Element wiederholt werden darf, und, dem gemäß, für diese Operationen verschiedene Zeichen einzuführen, würde sehr unrichtig seyn. Die Verschiedenheit liegt in den Elementen, womit man zu thun hat; der Index, worauf sich die combinatorische Operation bezieht, ist im ersten Falle nicht so gebaut, wie im zweyten. Höchstens bedürfte es in Absicht auf ihn bey wiederholbaren Elementen einer Abkürzung im Schreiben, so daß jedes Element nur einmal, und, wie oft es sich wiederholen darf, durch eine besondre Zahl daneben, angegeben würde.

des der gegebenen Elemente darf nur denjenigen Complexionen der vorigen Classe vorgesetzt werden, in denen dadurch kein Verstoß der Folge gegen die natürliche Rangordnung der Elemente entsteht. Ist also Wiederholung unbedingt gestattet, so darf es allen den Formen vorgesetzt werden, die nicht niedriger anfangen; ist sie bedingt gestattet, allen den Formen, welche in ihren ersten Stellen das vorzusetzende Element noch nicht so oft enthalten, als es überall vorkommen darf; ist sie gar nicht gestattet, allen den Formen der vorigen Classe, welche mit einem höheren Elemente anheben, als das vorzusetzende ist. Nimt man nach der Reihe jedes der gegebenen, wirklich verschiedenen Elemente, um es unter diesen Beschränkungen allen Complexionen vorzusetzen, die zu einer gewissen Classe gehören, so müssen alle Formen der nächsthöheren Classe in gesetzmäßiger Ordnung hervorgehn *k*). Sollte nicht bloß eine Classe von Combinationsformen, sondern deren mehrere von der ersten an, bis zu einer gewissen höheren, gefodert werden, und wollte man den

---

k) Nach dieser Methode bildete sich z. E. $\overset{4}{C}(1,1,1,2,2,3)$ allmälig so. Zuerst nähme man $\overset{1}{C} = 1, 2, 3$; daraus fände sich $\overset{2}{C} = 11, 12, 13, 22, 23$; daraus $\overset{3}{C} = 111, 112, 113, 122, 123, 223$; daraus endlich $\overset{4}{C} = 1112, 1113, 1122, 1123,$ [illegible] Fälle von unbedingt gestatt[illegible] [illegible]otener W[illegible]ederholung sind hier so [illegible] es unnöthig wäre, von ihnen Beyspiele zu geben.

Inbegriff aller dieser Formen, lexicographisch zusammengeordnet, erhalten, so wäre es nicht nöthig jede Classe erst für sich, nach den vorigen Regeln, zu entwickeln, und dann diese Formen nach den Gesetzen der lexicographischen Folge aneinander zu reihen, sondern man könnte durch Uebergehn von einer Form zur nächsthöheren, hier, wie sonst, die vollständige Darstellung aller vollbringen. Man lasse auf das letzte Element einer Form das kleinste folgen, welches ohne Unordnung, Ueberschreitung der für jedes bestimmten Wiederholbarkeit, Uebersteigung des Grades der höchsten Classe, wovon Formen vorkommen dürfen, geschehn kann, so hat man, so oft es möglich ist, eine nächsthöhere Form. Geht dieses Zusetzen nicht mehr an, so suche man in der Form die tiefste Stelle auf, welche ein höheres Element enthalten kann, als das in ihr stehende ist, und setze in sie ein so wenig als möglich höheres würklich für das ehemalige an den Platz. Dadurch erhält man alsdann, ohne Weiteres, die nächsthöhere Form *l*). Indessen mögte die ganze Operation selten vorkommen.

l) Der Inbegriff aller möglichen Classen aus den Elementen 1, 1, 2, 2, 3, 4 wäre folgender: 1, 11, 112, 1122, 11223, 112234, 11224, 1123, 11234, 1124, 113, 1134, 114, 12, 122, 1223, 12234, 1224, 123, 1234, 124, 13, 134, 14, 2, 22, 223, 2234, 224, 23, 234, 24, 3, 34, 4.

Man hätte ihn durch C(1, 1, 2, 2, 3, 4) andeuten [illegible] Bey verbotener, oder durchaus für [illegible] [illegible] Wiederholung, erschöpf[illegible] möglichen Classen [illegible] barkeit muß [illegible] kührlich [illegible]

Bemerkenswerth ist die Verwandschaft des Permutirens mit dem Combiniren. Man lasse alle gegebenen Elemente, als wenn permutirt werden sollte, auf einander folgen, mache aber in diese Permutationsform gewissermaßen einen Einschnitt, der von ihren Elementen so viele der anfänglichen abschneidet, als der Grad der zu bildenden Combinations-Classe deren fodert. Und nun permutire man unter der Beschränkung, daß nur die Formen für verschieden gehalten werden sollen, bey denen nicht durchaus dieselben Elemente in den nemlichen Abschnitten der ganzen Permutationsform stehn geblieben sind *m*).

---

m) Es würde leicht seyn für ein solches bedingtes Permutiren ursprüngliche Regeln zu geben, selbst in dem Falle, wo der Abschnitte in der gegebenen Elementenreihe noch mehrere gemacht würden, so daß nur die Formen für verschieden gelten sollten, bey welchen keine bloße Permutation der in demselben Abschnitte enthaltenen Elemente vorgegangen wäre. Hier ist nicht die Stelle für eine weitere Ausführung dieser höchstwichtigen zusammengesetzten combinatorischen Operation, auf welche man bey einer großen Menge bedeutender Untersuchungen zurückgeführt wird. Nur ein Beyspiel ihres Gebrauchs. Sind n verschiedene Dinge gegeben, aus denen man alle Combinationen zu m bilden soll, so macht man in die Reihe der n Elemente einen Abschnitt, der m auf der einen, n — m auf der andern Seite liegen haben wird. Der Permutationen dieser n Dinge würden in Allem n . n (n — 1) . . . . 1 seyn, ohne alle Beschränkung. Dürfen aber die m Dinge des ersten Abschnitts nicht unter einander permutirt werden,

III. Die Variation ist eine ordnende Operation, bey welcher schon mehrere getrennte Reihen von Elementen vorausgesetzt werden. Sie greift in alle diese Reihen ein, um aus jeder von ihnen ein Element herauszunehmen, und es mit ähnlichen aus den übrigen Reihen zusammenzustellen; sie verlangt aber eine gänzliche Vollständigkeit in Absicht der Complexionen, die sich auf diese Art bilden lassen. Das Zeichen V soll im Nachfolgenden den Inbegriff aller Formen andeuten, die sich auf die angegebene Weise aus allen Gliedern mehrerer gegebenen Reihen bilden lassen.

Bey der würklichen Ausführung dieser Operation bietet sich, als natürliche Regel der Ordnung, von selbst die Foderung dar, daß in der Folge, wie die gegebenen Reihen mit ihren Elementen, wovon sie jedesmal eines darbieten, zu der Bildung der Formen beytragen, eine unabänderliche Ordnung beobachtet werde. Die erste Stelle der Form soll immer aus der ersten Reihe, die zweyte aus der zweyten, besetzt werden, und so fort, dadurch erlangt man die Möglichkeit, der anfangs für eine einzelne Reihe von Elementen gewählten Bezeichnung auch hier getreu bleiben

---

und eben so wenig die n — m Dinge im zweyten Abschnitt, so reducirt sich die Zahl der Formen auf $\frac{n.(n-1).....1}{m.(m-1)...1.(n-m)...1}$ oder abgekürzt auf $\frac{n.(n-1)...(n-m+1)}{m.(m-1)...1}$, welches also die Zahl aller Combinationen zu m aus n Dingen ist.

zu können. Man bezeichne immerhin alle ersten Glieder der gegebenen Reihen mit 1, alle zweyten mit 2, überhaupt alle gleichhohen mit der Zahl, welche ausdrückt, die wievielsten sie in ihrer Reihe sind, es kann daraus keine Unbestimmtheit entspringen, sobald in den würklich gebildeten Formen die Stelle des Elements dient, diejenige unter den gegebenen Reihen nachzuweisen, auf welche es Beziehung haben soll. Auf diese Art kann also ein einziger gemeinschaftlicher Index, die Reihe der ganzen Zahlen, für alle gegebenen Reihen zugleich gebraucht werden.

Auch die Variationsformen werden zu einer bestimmten Classe gehören, die sich aber nicht nach Willkühr, sondern durch die Menge der Reihen, woraus sie gebildet werden sollen, bestimmen läßt.

Hat die eine der gegebenen Reihen so viele Elemente als die andre, dann bedarf es, um die Zusammensetzung der Formen zu beginnen, nur des allen diesen Reihen gemeinschaftlichen Index, und des Grades der Classe, wozu die Formen gehören sollen. Hat aber die eine der gegebenen Reihen nicht so viele Elemente als die andre, so ist bey dem Gebrauche ihres gemeinschaftlichen Index doch noch Rücksicht auf jede einzelne Reihe zu nehmen, damit nicht aus einer Reihe ein Glied von gewisser Zahl gefodert werde, welches in ihr nicht enthalten ist *n*).

---

n) In dem Falle, wo die gegebenen Reihen nicht gleichviele Elemente haben, oder gar in ihnen Lücken vorkommen, wird man gezwungen seyn, ein ziemlich

Bey der Bildung der Variationsformen ist das allmälig von niedrigern Formen zu höheren, nach suc-

---

umständliches Verfahren bey der Entwicklung der Variationsformen zu beobachten. Hier würde es am bequemsten seyn, alle Formen untereinander zu setzen, und ein für allemal, über jede Stelle der Formen, die Elemente der Reihe zu schreiben, aus welcher diese Stelle besetzt werden muß. Alsdann hat man, bey der Besetzung einer Stelle, immer nur Rücksicht auf die über ihr stehenden Elemente zu nehmen; soll sie so wenig als möglich erhöht werden, so ist es das am wenigsten höhere Element aus der Reihe der über ihr stehenden; soll sie so niedrig als möglich besetzt werden, so ist es das niedrigste der über ihr stehenden Elemente, womit man sie zu besetzen hat. Sollten z. E. aus den Reihen

A, B, C, D
b c d
α γ δ

alle Variationsformen gebildet werden, so daß man von der niedrigsten zu den successiv höheren fortschritte, so wäre folgendes Schema der Arbeit dazu nöthig, wenn 1, 2, 3, 4, die gleichhohen Glieder der Reihen andeuteten:

4
344
233
121

121	221	321	421
123	223	323	423
124	224	324	424
131	231	331	431
133	233	332	433
134	234	334	434
141	241	341	441
143	243	343	443
144	244	344	444

cessiv wachsenden Graden der Classen, aufsteigende Verfahren das natürlichste. Man setze die Elemente der ersten Reihe einzeln; man füge ihnen allen nach der Ordnung, die successiven Elemente der zweyten bey. Soll dies Beyfügen ein Nachsetzen seyn, wie es die Ordnung im Zusammenfügen der Elemente aus den verschiedenen Reihen in die successiven Stellen der Formen sodert, und sollen die Formen selbst in gehöriger Folge hervorgehn, so muß man mit dem niedrigsten Elemente der ersten Reihe beginnen, und ihm vollständig alle Elemente der zweyten allmälig nachsetzen, darauf das zweyte Element der ersten Reihe, um damit eben so zu verfahren, und so fort die übrigen. Allgemein: wenn die Variationsformen aus mehreren Reihen schon gebildet, und in gehöriger Ordnung gegeben sind, so erhält man aus ihnen diejenigen welche bey einer Verbindung der vorigen Reihen mit einer neuen, zu Variationsformen, überhaupt erzeugt werden können, wenn man allmälig jede der schon vorhandenen Formen nimt, um ihr nach und nach alle Elemente der neuen Reihe in ihrer Ordnung nachzusetzen, so daß man zu keiner folgenden Form fortschreitet, ehe man nicht der vorhergehenden alle die Elemente nachgesetzt hat, welche die neue Reihe in sich schließt *o*). Bey diesem Verfahren bedarf man

---

o) Sind z. B. die Reihen A, B, C, vorhanden, und sollen aus
a c, d
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$
ihnen alle Variationsformen gebildet werden, so hat

kaum eines Index; man könnte es mit den gegebenen Reihen selbst unmittelbar in Ausübung setzen. Dabey ist es völlig gleichgültig, ob jede der Reihen so viele Elemente hat, als die andren, oder nicht.

Braucht man aber dennoch für alle Reihen einen gemeinschaftlichen Index, so bekommen die Formen Aehnlichkeit mit Combinationsformen, die sich aus eben dem Index bilden könnten. Nur würde jedes Element sich wiederholen, insofern eines von seiner Zahl in mehreren, oder allen vorhandenen Reihen vorkommt, folglich wegen jeder in die Variationsformen eintreten kann. Auch würde man bey diesen Formen Unordnung in der Folge ihrer einzelnen Elemente nicht umgehn können, weil jedes Element einer folgenden Reihe, es sey hoch oder niedrig, allen Formen aus den vorhergehenden Reihen unbedingt nachgesetzt werden soll. Wollte man auf eine ähnliche Weise, wie bey den ursprünglichen combinatorischen Operationen, der Rangordnung

---

man erst $\overset{1}{V} = A, B, C$; darauf $\overset{2}{V} = Aa, Ac, Ad, Ba, Bc, Bd, Ca, Cc, Cd$; endlich $\overset{3}{V} = Aa\alpha, Aa\beta, Aa\gamma, Aa\delta, Ac\alpha, Ac\beta, Ac\gamma, Ac\delta$ u. s. w., mit dem Nachsetzen von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ hinter jede Form der vorigen Variationsclasse fortgefahren.

Wollte man die Elemente der folgenden Reihe den Formen, die sich aus den vorhergehenden schon gebildet haben, nicht nach, sondern vorsetzen, so müßte man zur Regel machen, daß die letzte Stelle der Form sich auf die erste der gegebenen Reihen beziehn sollte, und so fort; eine Unordnung, die ohne alle Noth eingeführt seyn würde.

zufolge, welche unter verschiedenen Variationsformen Statt finden kann, von der niedrigsten ausgehn, und allmälig zu jeder successiv höheren fortschreiten, so würde hier, im Allgemeinen, folgendes Verfahren nöthig seyn. Jede Stelle der Formen ist an eine bestimmte Reihe gebunden, so daß sie nur aus dieser die Elemente empfangen kann, wodurch sie besetzt werden soll. Um die niedrigste Form zu erhalten, besetze man also jede Stelle mit dem niedrigsten Elemente, welches die zur Ausfüllung dieser Stelle bestimmte Reihe in sich faßt. Um zu einer gegebenen Form die nächsthöhere zu finden, suche man die späteste Stelle der Form, in welche, aus der, ihr zugehörigen Reihe, noch ein höheres Element gesetzt werden darf, und bringe in sie das am wenigsten höhere wieder hinein; die folgenden Stellen fülle man jede mit dem allerniedrigsten Elemente aus, welches in den, zu ihrer Erfüllung angewiesenen Reihen, überall vorkommt, dadurch entsteht die nächsthöhere Form. In dem Specialfalle, wo jede der gegebenen Reihen so viel Elemente, als die andre besitzt, vom ersten an, bis zum höchsten hinauf, kann sich dieses Verfahren sehr abkürzen, weil alsdann die Elemente, womit die eine Stelle der Form, so wie die andre, besetzt werden kann, ein für allemal bekannt, und immer dieselben sind. Alsdann kann es heissen: man setze in die möglichst späteste Stelle ein nächstgrößeres Element, und fülle alle folgenden nach ihr, so oft es deren geben sollte, mit lauter 1 aus. In diesem Falle erscheinen die Variationsformen als Com-

binationscomplexionen, die sich aus einer einzigen Reihe von Elementen, dem gemeinschaftlichen Index aller vorhandnen Reihen der gegebenen Dinge, gebildet hätten, dabey aber in allen Permutationen, die ihre Elemente erlaubten, vollständig dargestellt. Gerade dieser Fall kommt im arithmetischen Gebrauche des Variirens sehr häufig vor, und die Regel für ihn ist von ausserordentlicher Wichtigkeit. Sind, so lautet sie, mehrere an Zahl und Rang der Elemente völlig gleiche Reihen vorhanden, so bezeichne man ihre gleichhohen Glieder durch dieselbe Zahl, und bilde auf diese Art einen Index, welcher die natürlichen Zahlen, nach der Ordnung, enthalten wird. Aus diesem Index erzeuge man zuerst alle möglichen Combinationsformen des Grades, welcher durch die Zahl der vorhandenen Reihen vorgeschrieben ist. Alsdann permutire man vollständig auf alle möglichen Arten jede dieser Combinationsformen. Der Inbegriff aller daraus entstandenen Complexionen giebt die gesuchten Variationsformen, in denen jedes Element ein Glied aus einer der gegebenen Reihen bedeutet, so daß die Zahl der Stelle, worin das Element steht, die Zahl der Reihe nachweist, woraus es genommen werden soll. Bloß in diesem lezten Falle also dürfte man allenfalls sagen, daß die Variation sich auf Permutiren und Combiniren zurückführen läßt; in allen übrigen, sobald z. E. die eine Reihe nicht eben so viel Elemente hat, als die andre, oder einzelne Glieder, in der einen oder der andern, von gewisser Zahl, nicht vorhanden sind, welches doch im Allgemeinen eben so gut

gedacht werden kann, findet diese Zurükführung durchaus keine Statt, und es bleibt das Variiren ein ursprüngliches, obgleich schon zusammengesetztes combinatorisches Verfahren. Für die Arithmetik ist es das wichtigste unter allen, denn vermöge seiner, wie sogleich im folgenden Capitel erhellen wird, treten zuerst die Begriffe und Regeln der Combinationslehre in die Wissenschaft der Zahlenverknüpfungen ein.

Drittes Kapitel.

Nähere Entwicklung der Gesetze des Multiplicirens zusammengesetzter Größen. Binomischer Lehrsatz.

Die Multiplication vieltheiliger Größen mit einander, bietet schon in ihrer unbestimmtesten Form, wo die einzelnen Theile der Factoren noch kein Gesetz des Fortschritts beobachten, mithin noch nicht successive Potenzen einer bestimmten Hauptgröße enthalten, sondern jeder als Etwas einfaches für sich gegeben werden, Stoff zur Anwendung combinatorischer Begriffe dar. Offenbar stellen die zusammengesetzten Factoren, welche sich zu einem Producte verbinden sollen, in ihren Gliedern einzelne Elemente vor, die sich durch die Multiplication als Factoren zusammengesellen; die Operation vollenden heißt hier nichts anders, als alle möglichen

Formen darstellen, zu denen jede der vorhandenen vieltheiligen Größen oder Elementenreihen, zur Zeit, eins ihrer Glieder, oder Elemente hergegeben hat. Will man also nur das Zusammenstellen der Elemente ein Zusammenstellen von Factoren seyn lassen, das Zusammenstellen der Formen selbst aber ein Setzen von Theilen, so kommt das ganze Geschäfft auf die Bildung aller Variationsformen aus mehreren gegebenen Reihen zurück. In der That ist auch das allmälig aufsteigende Verfahren, wobey man die Glieder der ersten Reihe erst successiv mit allen Gliedern der zweyten; darauf diese Producte allmälig mit den successiven Gliedern der dritten multiplicirt, und so fort, ganz der einen Regel des Variirens gemäß. Aber sie ist offenbar nicht die einzig mögliche, und namentlich würde die zweyte Hauptmethode, welche nicht von niedrigeren Classen zu höheren aufsteigt, sondern von Form zu Form, ihren wachsenden Range gemäß fortschreitet, in den meisten Fällen bequemer und einfacher in der Ausübung seyn.

Indessen verdient eine solche Multiplication, bey welcher weder die Data noch das Resultat bestimmte Gesetze des Fortschritts in sich tragen, keine besondre Betrachtung, ist einer solchen auch im Allgemeinen nicht weiter fähig *p*). Sobald wir aber die Annahme

---

p) Man müßte denn vermöge einer willkührlichen Annahme den bloß combinatorischen Rang der einzelnen Producte zu einem würklichen erheben wollen, wo sich freylich die Aufgabe: jedes Product, sobald

in Beziehung auf sie specialisiren, bietet sich allerdings zu näheren Entwicklungen Veranlassung dar. Namentlich, wenn alle die Reihen von Theilen, die sich mit einander multipliciren sollen, als identisch angenommen werden, wenn es also, in der gewöhnlichen Kunstsprache darauf ankommt, eine vieltheilige Größe (Polynomium) auf die Potenz eines ganzen und positiven Exponenten zu erheben, so gestatten uns die schon bekannten Regeln der Ordnung Abkürzungen und Modificationen des ursprünglichen Verfahrens, die wohl verdienen, entwickelt und in besondre Regeln niedergelegt zu werden.

Um mit dem einfachsten Falle anzufangen, so mögen alle die gleichen Factoren, woraus sich das Product bilden soll, nur zweytheilig seyn (Binomium). Man hat also mehrere Reihen, deren jede zwey Elemente in sich faßt, und soll aus ihnen alle Variationsformen bilden. Hier findet also der leichteste Fall dieser Operation Statt, wo man, ohne weitere Rücksicht, für alle Reihen einen gemeinschaftlichen Index einführen darf; und unmittelbar aus seinen Elementen die Variationsformen zusammensetzen kann. Dabey wird für die gegenwärtige Voraussetzung die Regel der Ableitung die bequemste seyn, welcher gemäß aus dem gemeinschaftlichen Index der gegebenen Reihen, seine Elemente als unbestimmt wiederholbar gedacht, erst alle möglichen Combinationsformen abgeleitet werden, und

---

nur seine Zahl vorgeschrieben ist, unabhängig von allen übrigen darzustellen, aufwerfen, und lösen lassen würde.

nachher jede von diesen Formen auf alle mögliche Arten permutirt erscheint. Denn da die gleichhohen Glieder der hier angenommenen Reihen durchaus dieselben sind, die Elemente der Formen aber als Factoren zusammengestellt werden, und geänderte Folge der Factoren auf die Größe des Products keinen Einfluß hat, so müssen hier alle die Formen, welche durch bloßes Permutiren andrer entstehn, als identisch betrachtet, und im Zusammennehmen als Wiederholungen des nemlichen Products nur gezählt werden, damit von jeder bekannt werde, wie oft sie vorkommt. Dies erreicht sich aber sogleich dadurch, daß man aus den Elementen des gemeinschaftlichen Index nur diejenigen Complexionen würklich entwickelt, die sich durch geänderten Inhalt von einander unterscheiden, und, statt jede von ihnen würklich zu permutiren, ihr bloß als Factor die Permutationszahl beyfügt, welche der Menge und Art der in ihr vorkommenden Elemente zukommen wird.

Diese Combinationsformen aber, da nur zwey, unbedingt wiederholbare Elemente vorhanden sind, und der Grad der Classe wozu sie gehören sollen, durch die Menge der gegebenen Reihen vorgeschrieben ist, bilden sich, der Idee einer Rangfolge unter ihnen selbst zufolge, auf eine sehr einfache Weise. Die niedrigste enthält lauter Elemente, deren jedes dem ersten des gegebenen gleich ist; jede folgende entsteht, wenn man aus der vorhergehenden ein erstes Element herauswirft, um dafür ein zweytes wieder an den Platz zu setzen, als wodurch hier allein eine Erhöhung geschehen kann.

Weiß man also nur von einer solchen Form, die wievielste nach der anfänglichen sie seyn soll, so kennt man ihren ganzen Bau. Sie hat so viele zweyte Elemente in sich, als ihre Zahl angiebt, und daneben so viele erste, als nöthig sind, um diese Zahl zu der derjenigen zu ergänzen, welche die Menge der vorhandenen Reihen, oder die Classe der zu bildenden Formen ausdrückt.

Jezt also kann das Gesetz einer solchen Multiplication vollständig ausgesprochen werden. Soll man eine zweytheilige Größe (a + b) auf eine vorgeschriebene Potenz von ganzem und positiven Exponenten erheben; so bilde man eine Reihe einzelner Producte, jedes so viele Factoren enthaltend, als der Grad der Potenz fodert. Im anfänglichen müssen alle Factoren dem ersten Theile der gegebenen Größe gleich seyn, (a^n) in den successiv folgenden muß sich bey jedem Schritte einer von diesen Factoren verlieren, und dafür ein anderer, welcher dem zweyten Theile der gegebenen Größe gleich ist, wieder an die Stelle treten, so daß, allgemein, ein folgendes Product von bestimmter Zahl, eine Potenz des ersten Theils enthalten wird, in deren Exponenten so viele Einheiten an der anfänglichen Menge fehlen, als die Zahl des Products anzeigt, daneben aber als Factor eine Potenz des zweyten Theils in sich schließen muß, deren Exponent eben diese Zahl des Products selbst ist. (Das r^{te} Glied von $(a + b)^n$ wird $a^{n-r} . b^r$ enthalten). Jedes von diesen Producten muß so oft gesetzt werden, als seine Factoren, wenn sie Ele-

mente einer Permutation wären, Versetzungsformen erlauben würden.

Was diese Versetzungszahl betrifft, die hier als Factor oder Coefficient in den Gliedern einer Potenz von einer zweytheiligen Größe vorkommt, und in so fern Binomialcoefficient zu heissen pflegt, so sind zwar die Gesetze ihrer Bildung bekannt, indessen lässt sich dabey noch eine, Bemerkung verdienende, Abkürzung anbringen. Die Producte enthalten alle gleichviel Factoren, die Zahl der Elemente also, welche permutirt werden sollen, ist immer die nemliche. Wären daher alle diese Elemente verschieden, so bliebe die Permutationszahl immer dieselbe; ein Product aller ganzen Zahlen von 1 an, bis zur Zahl der vorhandenen Elemente hinauf (n.(n — 1)....1). Aber da in jedem Producte gleiche Factoren oder Elemente liegen, so muß sie noch Veränderungen erleiden; für jede Zahl gleicher Elemente, die unter den gegebenen vorkommen, hat man sie durch die Permutationszahl zu dividiren, welche einer solchen Menge zukommt. Das anfängliche Product, so wie das allerlezte, enthalten lauter gleiche Factoren; für sie also wird die Permutationszahl, weil Dividend und Divisor sich aufheben, die Einheit. Alle übrigen Producte aber enthalten gleiche Factoren von zweyerley Art; für sie also muß die volle Permutationszahl durch zwey kleinere dividirt werden, welche den kleineren Mengen von untereinander gleichen Elementen zugehören, die in der

Form enthalten sind. (In Zeichen: das r^{te} unter den Producten ist: $a^{n-r}.b$. Seine Versetzungszahl also $\frac{n.(n-1)....1}{(n-r)...1.r...1}$.) Nun aber ist in einer größeren Permutationszahl jede kleinere enthalten. Man wird also wenigstens die eine von jenen beyden kleineren sogleich gegen die volle Permutationszahl heben können, wenn auch die Division mit der andern nur angedeutet werden kann. Alsdann gehn die Factoren der vollen Permutationszahl vom höchsten nur soweit herab, bis die Reihe dieser, allmälig sich um eine Einheit verringernden, Zahlen, an den höchsten Factor jener kleineren aufzuhebenden Permutationszahl kommt; und brechen, ohne diesen noch mit in sich aufzunehmen, auf einmal ab. Zu ihrem Producte gehört als Divisor alsdann bloß noch die zweyte der kleineren Permutationszahlen, die sich zwar in der Wirklichkeit gleichfalls muß heben lassen, von der aber im Allgemeinen nicht mehr angegeben werden kann, wie es geschehn muß. An sich ist es völlig gleichgültig, welche von den beyden kleineren Versetzungszahlen, gegen eben so viele, den ihrigen gleiche, Factoren der vollen, gehoben werden soll; es ist indessen am gebräuchlichsten, es diejenige seyn zu lassen, welche wegen der unter einander gleichen Elemente oder Factoren von der Art des ersten Theils, als Divisor gesetzt werden muß (In Zeichen: wenn das r^{te} unter den Producten, in welche sich $(a+b)^n$ entwickeln wird, $a^{n-r}b^r$, und dem gemäß der anfängliche Ausdruck seiner Versetzungszahl, die ihm

als Factor beygegeben werden muß, $\frac{n.(n-1....1}{(n-r)...1.r...1}$ ist, so hebt man die der Menge gleicher Factoren von der Art a, d. h. der Zahl $n-r$, zugehörige Versetzungszahl $(n-r)....1$, durch Division würklich, so daß die obere nur noch von n. bis auf $(n-r+1)$ herabgeht, die folgenden Factoren aber, von $n-r$ an bis 1 aus ihr wegfallen; alsdann bleibt im Divisor bloß die zweyte Versetzungszahl, die wegen der gleichen Factoren von der Art b in ihm vorkam, d. h. $r....1$, ungeändert stehn. Es wird also der Factor, welcher dem Producte $a^{n-r}.b^r$ beygegeben werden muß, nach dieser Abkürzung, $\frac{n.(n-1)...(n-r+1)}{1.2....r}$, indem es offenbar völlig gestattet ist, die Ordnung der Factoren im Nenner umzukehren. Es könnte aber auch eben so gut, wenn man die zweyte Permutationszahl heben, die erste stehn lassen wollte, $\frac{n.(n-1)...(r+1)}{1.2...n-r}$ seyn; beyde Ausdrücke sind in sich identisch und es hängt von Umständen ab, ob der eine oder der andre bequemer im Gebrauche seyn soll.)

Um alle diese Entwicklungen in eine mechanische Regel zusammenzufassen, kann man sich folgendermaßen ausdrücken. Um eine zweytheilige Größe $(a+b)$ auf die Potenz eines bestimmten Exponenten, der hier als ganze positive Zahl gedacht wird (n), zu erheben, bilde man eine Reihe von Gliedern, in welcher das Anfangsglied nichts weiter als eine eben so hohe Potenz des

ersten Theils (a^n) enthält, jedes folgende (r^{te}) aber eine Potenz des ersten Theils, derem Exponenten an jener anfänglichen Höhe schon so viele Einheiten abgehn, als die Zahl des Gliedes in sich fasst, (a^{n-r}) nebst einer Potenz des zweyten Theils, deren Exponent gerade soviel Einheiten enthält, als die Zahl des Gliedes (b^r). Jedes Glied bekomme einen bestimmten Coefficienten. Dieser muß jedesmal ein Bruch seyn, dessen Zähler und Nenner Producte aus benachbarten ganzen Zahlen sind. Im Zähler fängt sich das Product immer mit dem Grade der vorgeschriebenen Potenz selbst, als höchstem Factor, an, und geht, durch Factoren, die sich successiv um eine Einheit verringern, so weit fort, bis es zu einem Factor herabgekommen ist, der vom Grade der Potenz so viele Einheiten schon verloren hat, als die um eine Einheit verringerte Zahl des Coefficienten andeutet (von n bis auf $n-(r-1)$ herabgekommen ist). Im Nenner beginnt das Product mit der Einheit, und geht, durch alle successiv größeren Zahlen, bis auf die des Coefficienten selbst, welche den lezten seiner Factoren abgibt, (von 1 bis r).

Wollte man bloß in Zeichen reden, so drückte sich die ganze Vorschrift so aus. Es ist $(a+b)^n$ eine Reihe, deren Anfangsglied a^n, deren r^{tes} Glied

$$\frac{n.(n-1)\ldots(n-(r-1))}{1.2\ldots r}\, a^{n-r}.b^r$$

ist, und man setze nur für r alle Werthe von 1 an, durch die successiven ganzen Zahlen hindurch, um aus diesem unbestimmten Ausdrucke alle einzelnen Glieder, vom ersten

nach dem anfänglichen an, bis zum lezten, welches das n^{te} nach ihm seyn wird, vollständig zu entwickeln.

In der Folge sollen die Coefficienten, welche in den Gliedern der berechneten Potenz eines Binomiums vorkommen, als Größen von bekannter Bildung durch ein einfaches Zeichen angedeutet werden. $\overset{r}{{}^{n}\mathfrak{B}}$ soll den Coefficienten des r^{ten} Gliedes in der n^{ten} Potenz einer zweytheiligen Größe, und also soviel als $\frac{n.(n-1)\ldots(n-(r-1))}{1.2\ldots r}$ anzeigen. Der häufige Gebrauch dieser Zahlen rechtfertigt eine solche Abkürzung.

Um nur einige Beziehungen dieser Zahlen, welche noch bey sehr vielen andern Größen-Verknüpfungen gebraucht werden, hier anzuführen, so folgt unmittelbar aus ihrer Entstehung, daß zwey solche Binomialcoefficienten, sobald sie nur in der vollständigen Reihe, welche alle, zu der nemlichen Potenz gehörige, in sich schließt, gleich weit vom Anfang und Ende abstehn, völlig gleich unter einander seyn werden. (In Zeichen: $\overset{r}{{}^{n}\mathfrak{B}} = \overset{n-r}{{}^{n}\mathfrak{B}}$.) Dies bringt bey der würklichen Berechnung aller, zu einer solchen Potenz gehörigen, Glieder den Vortheil, daß, sobald man über die Hälfte zu gelangen beginnt, die Coefficienten der folgenden Glieder aus den schon vorhandenen der vorhergehenden unmittelbar abgenommen werden können. Aber nicht bloß unter den Coefficienten der nemlichen Potenz, sondern auch unter denen, die zu successiven Potenzen gehören, findet eine nahe Verwandschaft Statt. Zwey

Binomialcoefficienten einer gewissen Potenz, die unmittelbar auf einander folgen, geben, zusammenaddirt, einen Binomialcoefficienten der nächsthöheren Potenz, dessen Zahl so hoch ist, als die des lezten unter den beyden, welche sich zu ihm vereinigten. (In Zeichen: $^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{n}\overset{r+1}{\mathfrak{B}} = {}^{n+1}\overset{r+1}{\mathfrak{B}}$). Der Beweis dieser Behauptung kann sehr leicht durch würkliche Addition geführt werden. (Es ist $^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} = \frac{n.(n-1)\ldots(n-(r-1))}{1.2\ldots r}$

$$^{n}\overset{r+1}{\mathfrak{B}} = \frac{n.(n-1)\ldots.(n-(r-1))(n-r)}{1.2\ldots r.(r+1)}$$

Beyde Brüche müssen, ehe man sie addiren kann, auf einerley Benennung gebracht werden. Dazu ist bloß nöthig, den ersten im Zähler und Nenner mit $(r+1)$ zu multipliciren. Ist dies geschehn, so haben die Zähler der gleichbenannten Brüche die Factoren $n.(n-1)\ldots(n-(r-1))$ gemein; der erste hat nur $(r+1)$ eigenthümlich, der zweyte nur $(n-r)$. Diese beyden eigenthümlichen Factoren geben, durch Addition vereinigt, $(r+1)+(n-r)=(n+1)$; diese Summe, mit den vorher abgesonderten, beyden Theilen gemeinschaftlichen, Factoren multiplicirt, $(n+1).n\ldots.$ $n-(r-1)$, als den Zähler des neuen Bruchs; worin man offenbar ohne Aenderung des Werths den lezten Factor auch durch $(n+1-r)$ ausdrücken kann. Dazu den gemeinschaftlichen Nenner als solchen wieder gefügt, bekommt man $\frac{(n+1)n\ldots(n+1-r)}{1.2\ldots(r+1)}$, welches,

dem festgestellten Gesetze gemäß, der entwickelte Werth von $^{n+1}\overset{r+1}{B}$ ist.). Käme es darauf an, für die successiven Potenzen eine Tabelle der Binomialcoefficienten zu entwerfen, so würde dieser Satz dazu sehr brauchbar seyn. Der Coefficient des Anfangsgliedes in jeder Potenz ist die Einheit; alle übrigen aber findet man durch successive Addition von zwey benachbarten Coefficienten der unmittelbar vorhergehenden Potenz *q*). Noch eine andre leicht abzuleitende und sehr brauchbare Beziehung ist die: daß alle Binomialcoefficienten, die zu derselben Potenz gehören, in eine Summe gezogen, jedesmal eine Potenz der Zahl 2 hervorbringen, dem Grade nach so hoch, als die, welcher die Coefficienten angehörten. (In Zeichen: $1 + {}^{n}\overset{1}{B} + {}^{n}\overset{2}{B} \ldots\ldots {}^{n}\overset{n}{B} = 2^{n}$). Der Beweis dieses Satzes ergibt sich auf folgende Art. Alle Glieder der entwickelten Potenz einer zweytheiligen Größe, zusammengerechnet, geben den Werth dieser Potenz, was auch die beyden Theile

q) Der Anfang einer solchen Tabelle sähe so aus:

Grad der Potenz	Zahl des Coefficienten							
	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Das Anfangsglied jeder Horizontalreihe ist 1, jedes folgende ist durch Addition des darüber stehenden zu dem diesem in seiner Reihe unmittelbar vorhergehenden erzeugt.

der potenzirten Größe seyn mögen. Nimt man also an, daß der erste Theil, so wie der zweyte, jeder die Einheit ist, so beträgt die zweytheilige Größe eigentlich die Zahl 2, und jene gefoderte Potenz von ihr ist eine Potenz der Zahl 2. Aber in der Reihe von Gliedern, welche die Entwicklung dieser Potenz darstellt, verschwinden bey dieser Annahme die Potenzen des ersten sowohl als des zweyten Theils, denn jede Potenz der Einheit ist selbst wieder die Einheit, und kann als Factor weggelassen werden. Es bleiben also in den Gliedern bloß die Coefficienten stehn, und ihre Summe ist es allein, welche den Werth jener berechneten Potenz ausmacht. (In Zeichen: Wenn allgemein $(a+b)^n$ $= a^n + {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} . a^{n-1} . b^1 + \ldots . {}^{n}\overset{n}{\mathfrak{B}} . b^n$ ist, und man, für a und b, die Einheit an die Stelle setzt, so findet sich $(1+1)^n = 2^n = 1 + {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} + \ldots {}^{n}\overset{n}{\mathfrak{B}}$).

Es ist nicht nothwendig, die Untersuchung auf eine zweytheilige Größe zu beschränken. Man mag eine aus beliebig vielen Theilen bestehende (Polynomium) annehmen, um sie auf eine gewisse Potenz zu erheben, und das Verfahren wird im Wesentlichen ungeändert bleiben. Die Reihen, woraus alsdann die Variationsformen gebildet werden sollen, enthalten jede nur mehr als zwey Glieder, der ihnen allen gemeinschaftliche Index also mehr als zwey Elemente. Man erzeugt aus diesem Index alle die Combinationsformen, welche, bey unbedingter Wiederholbarkeit der Elemente, sich durch würklich geänderten Inhalt von einander unterscheiden,

und fügt jeder von ihnen als Factor die Permutationszahl bey, welche der Art und Menge der in ihr befindlichen Elemente zugehört. Dabey ist also eines Theils das Bilden der Combinationsformen weitläuftiger wie vorhin, weil der Fortschritt von der einen zur andern nicht mehr so einfach ausgedrückt werden kann, und nicht sich immer gleich bleibt; andern Theils aber auch die Zusammensetzung der Permutationszahlen mannichfaltiger, weil hier mehr als zwey Arten gleicher Elemente vorkommen können *r*). Ueberhaupt aber verdienen vieltheilige Größen, in deren successiven Theilen kein weiteres Gesetz des Fortschritts beobachtet seyn soll, kaum eine ausführliche Betrachtung.

Sobald wir zu den Formen zurückkehren, welche den Hauptgegenstand der Analysis ausmachen, d. h. zu solchen, die nach Potenzen einer gewissen Hauptgröße angeordnet sind, um bey ihnen die Aufgabe der Multiplication vollständig zu lösen, so finden wir unsre bisherigen Betrachtungen noch immer als unzureichend. Wir sind allerdings in Besitz mehrerer Methoden, die uns alle einzelnen Partial-Producte solcher zusammengesetzten Factoren vollständig schaffen können, aber die

---

r) Von $a + b + c$ wäre die dritte Potenz auf diesem Wege gesucht, so zu erhalten. Aus drey Elementen, a, b, c, die wiederholbar sind, giebt es folgende Formen: aaa, aab, aac, abb, abc, acc, bbb, bbc, bcc, ccc; ihre Permutationszahlen sind: 1, 3, 3, 3, 6, 3, 1, 3, 3, 1; es ist also $(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$.

Ordnung, worin wir diese Producte erhalten, ist eine bloß combinatorische. Und es ist uns hier ein ganz andres Princip der Anordnung gegeben; alle die Producte, welche die nemliche Potenz der Hauptgröße in sich schließen, sollen zu einer Summe zusammengezogen werden. Diese Bedingung aber modificirt die combinatorischen Regeln, wenn sie so eingerichtet werden sollen, daß durch ihren Gebrauch sogleich auch sie erfüllt werden kann.

Viertes Kapitel.

Variationen zu bestimmten Summen. Gebrauch davon bey der Bildung eines Products aus Formen des ersten Grades.

Wenn mehrere, nach Potenzen einer bestimmten Hauptgröße fortschreitende, Formen mit einander multiplicirt werden sollen, so ist es nicht genug, alle möglichen Producte zu bilden, die sich dadurch, daß jede dieser Formen zur Zeit eines von ihren Gliedern als Factor hergibt, hervorbringen lassen. Das Zusammenordnen jener Producte, so, daß alle diejenigen, welche eine gleichhohe Potenz der Hauptgröße enthalten, als Theile eines einzigen Hauptgliedes erscheinen, macht einen zweyten, eben so wesentlichen Theil der ganzen Operation aus. Dabey entscheiden also die Potenzen der Hauptgröße, welche in den einzelnen Gliedern der sich

multiplicirenden Formen liegen. Ihre Exponenten, zusammenaddirt, geben den Exponenten der Potenz, welche das Product enthalten muß, während das Product ihrer Coefficienten als Coefficient in eben demselben erscheint. Wäre es also möglich, die Coefficienten der einzelnen Glieder in den gegebenen zusammengesetzten Factoren, bey der Einführung eines Index für dieselben, durch Zahlen anzudeuten, die zugleich die Exponenten der Potenzen ausdrückten, welche die Hauptgröße in diese Glieder abgegeben hätte, so würde daraus eine große Erleichterung entspringen. Man brauchte sich alsdann bloß um die Coefficienten der Glieder zu bekümmern, und Producte aus ihnen zu bilden. Wollte man wissen, was für eine Potenz der Hauptgröße ein solches Product bey sich führen müsste, so rechnete man nur die Zahlen zusammen, wodurch die Coefficienten, aus denen, als Factoren, dasselbe gebildet ist, angedeutet worden sind. Und so kann das Zurückführen der Multiplication auf das Variiren auch hier wesentliche Dienste leisten. Sollte es vollends möglich seyn, die Regeln für die Darstellung aller Variationsformen, die zu einer gewissen Classe gehören, so zu modificiren, daß diese Formen, ohne sich in unbedingte combinatorische Rangfolge zu stellen, gruppenweise hervorgingen, so daß alle diejenigen, worin die Summe der Elemente dieselbe Zahl ausmachte, übrigens unter sich auf die gewöhnliche Art geordnet, als zu einer einzigen Gruppe gehörig, hervorgehn müssten, so würde auf diesem Wege Alles geleistet, was nur gefodert werden kann. Denn

man hätte in dem Inbegriff aller Formen, die der nemlichen Summe angehörten, den Inbegriff aller Coefficienten-Producte aus den gegebenen Reihen, die zu der nemlichen Potenz der Hauptgröße gehörten, zu derjenigen nemlich, wofür der Exponent eben jene gemeinschaftliche Summe seyn würde.

Die gefoderte Bedingung aber, einen gemeinschaftlichen Index für alle gegebenen Reihen anzuführen, der zugleich die Coefficienten dieser Glieder andeutet, und den Exponenten der Potenz, welche daneben vorkommt, ausdrücken soll, erfüllt sich ohne Schwierigkeit. Wir haben es hier noch mit Formen zu thun, deren Potenzen nach ganzen und positiven Exponenten fortschreiten, so daß in jedem folgenden Gliede eine andre ganze Zahl als Exponent der Potenz vorkommt. Es kann also nichts hindern, diese Exponenten selbst zu Anzeigern der Glieder zu machen. Selbst dann, wenn im Anfangsgliede der gegebenen Reihen gar keine Potenz der Hauptgröße vorkäme, würde nichts hindern können, o zum Zeichen dieses Gliedes zu machen. Es ist überhaupt durchaus nicht nothwendig, daß zum Behuf combinatorischer Operationen die natürliche Zahlenreihe von 1 an, in ununterbrochener Folge zur Andeutung der gegebenen Elemente gebraucht werde, sondern nur das natürlichste, und bey völliger Willkühr vorzüglichste Verfahren. Haben die Glieder einer Reihe aus anderweitigen Gründen successiv verschiedenen Rang, so können die Rangzahlen derselben ohne Schwierigkeit gebraucht werden, um als Zeichen jener Glieder zu dienen. Es

ist indessen sehr leicht, wenn man will, auf jene einfache Voraussetzung auch hier zurückzukommen. Man kann bey jeder, nach Potenzen einer Hauptgröße geordneten Reihe, dadurch, daß man alle ihre Glieder mit einer willkührlich eingerichteten Potenz der nemlichen Größe multiplicirt oder dividirt, augenblicklich bewürken, daß in ihrem ersten Gliede die erste Potenz der Hauptgröße vorkommt. Und nach vollendeter Rechnung kann man an den Gliedern des Resultats eben so leicht, auf umgekehrtem Wege, wieder verbessern, was durch jene Veränderung einstweilig unrichtig geworden seyn mag. Insofern sind wir also berechtigt, die Formen, welche wir hier miteinander zu multipliciren haben, alle so anzunehmen, daß in ihrem ersten Gliede die erste Potenz der Hauptgröße, in den folgenden successiv höhere vorkommen, so daß dem gemäß die Reihe der natürlichen Zahlen, nur daß Lücken darin gestattet sind, zugleich die Coefficienten und den Rang der Potenzen in den einzelnen Gliedern andeuten kann.

Am einfachsten und zugleich am häufigsten anwendbar ist dabey die Voraussetzung, daß alle die gegebenen Reihen in gänzlicher Vollständigkeit, alle Glieder, zwischem dem des ersten, und dem des höchsten Ranges enthalten. Alsdann kann, wie vorher, für sie alle ein gemeinschaftlicher Index, die Reihe der natürlichen Zahlen gebraucht werden, so daß, während der Bildung der Variationsformen, auf keine der einzelnen Reihen ferner Rücksicht genommen zu werden braucht. Indessen bleibt diese Voraussetzung doch nur speciell.

Hätte die eine Reihe nicht ebensoviele Glieder als die andre, fehlten hier und dort in dieser oder jener Glieder eines gewissen Ranges die in andern vorkämen, so müsste für jede Reihe ein besondrer Index, freylich immer aus der Reihe der natürlichen Zahlen gebildet, angenommen, auf die Stelle der Variationsformen, welche den Gliedern dieser Reihe angewiesen ist, bezogen, und während der Entwicklung der einzelnen Complexionen jedesmal in Rücksicht genommen werden. Insofern blieben also hier alle schon vorhin aufgestellten Gesetze des Varlirens völlig ungeändert.

Um mit dem einfachsten Falle anzuheben, so mögen mehrere Reihen mit gleichvielen und gleichhohen Gliedern vorhanden seyn. Es werde verlangt, alle Variationsformen aufzustellen, in denen die Elemente eine gewisse, unabänderlich bestimmte Summe darstellen, und dabey sämtlich zu der, durch die Zahl der Reihen vorgeschriebenen Classe gehören. Dabey wird ein gedoppelter Fall erwogen werden müssen: entweder die Glieder der Reihen gehn in unbestimmte Weite fort, so daß deren von jeder noch so hohen Zahl vorhanden sind, oder sie brechen mit einem Gliede von bestimmt vorgeschriebener Höhe ab.

Das Verfahren, welches sich auch hier zuerst darbietet, ist das coordinirende, welches von der niedrigsten Form zu den successiv höheren fortschreitet. Um die niedrigste Form zu finden, sezt man in alle früheren Stellen das Niedrigste, was man besitzt, das heisst hier lauter Einen, aber in die allerlezte Stelle ein

Element, groß genug um mit jenen Einen die gefoderte Summe voll zu machen. Bey einer beschränkten Zahl von Elementen hat man vielleicht kein so hohes mehr in seiner Gewalt, alsdann also besetzt man die lezte Stelle so hoch als man darf, und legt von dem Reste, der nun noch an der Summe, welche die Form darstellen soll, fehlen wird, allmälig den vorhergehenden Stellen das Höchste bey, was man nehmen kann, um die in ihnen zum Vorschein kommenden Elemente nicht über die vorgeschriebene Grenze zu treiben, wobey sich von selbst versteht, daß man einer früheren Stelle nicht eher eine Erhöhung geben darf, als bis die, auf sie folgende, spätere, keine mehr anzunehmen fähig ist. Um zu einer schon gegebenen Form die nächsthöhere, derselben Summe und Classe angehörige, zu finden, suche man die späteste Stelle auf, deren Element sich erhöhen lässt, weil in einer noch späteren Stelle ein erniedrigungsfähiges Element vorhanden ist, welches den Stoff dazu hergeben kann. Man erhöhe das erste Element um eine Einheit, fülle alle folgenden Stellen auch mit Einen aus, und setze in die lezte ein Element, welches mit allen übrigen die verlangte Summe hervorbringt. Sollte ein so hohes Element nicht vorhanden seyn, so verfahre man genau wieder, wie bey der Bildung der niedrigsten Form in dem nemlichen Falle s).

s) Sollten, bey einer unbedingt fortschreitenden Elementenreihe alle Variationsformen der vierten Classe zur Summe 9, (was man nicht unschicklich durch $^{9}\overset{4}{V}$ andeuten könnte, gebildet werden, so würde die

Auch durch Aufsteigen von einer Classe zur andern, kann man solche, einer bestimmten Classe und Summe angehörige, Variationsformen erzeugen, und zwar auf mehr als eine Weise. Will man z. E. die einmal vorgeschriebene Summe festhalten, und nur von den Formen, die diese Summe in niedrigern Classen darstellen, allmälig zu denen der höheren Classen aufsteigen; so gilt folgende Vorschrift. Gehn die Elemente so hoch hinauf, so giebt es schon in der ersten Classe eine Form, welche die verlangte Summe darstellt; es ist die Zahl dieser Summe selbst. Ist das aber nicht der

---

niedrigste Form 1116, und aus ihr bildeten sich, den Regeln gemäß, allmälig die folgenden: 1116, 1152, 1143, 1134, 1143, 1152, 1161, 1215, 1224, 1233, 1242, 1251, 1314, 1323, 1332, 1341, 1413, 1422, 1431, 1512, 1521, 1611, 2115, 2124, 2133, 2142, 2151, u. s. w.

Wäre hingegen das höchste vorhandene Element 4, so würde die erste Form nicht mehr 1116 bleiben dürfen; setzte man 1114, so fehlten an der Summe noch zwey Einheiten, die folglich auf die nächste Stelle nach der lezten geworfen werden müssen. So ist also hier die niedrigste Form 1134, und es entstehn aus ihr folgende: 1134, 1143, 1224, 1233, 1242, 1314, 1323, 1332, 1341, 2134, 2133, 2142, 2214, 2223, 2232, 2241, 2313, 2322, 2331, 2412, 2421, 2511, 3114, 3123, 3132, 3141, 3213, 3222, 3231, 3312, 3321, 3411, 4113, 4122, 4131, 4212, 4221, 4311.

Es gibt eine Menge von kleinen Kunstgriffen und Abkürzungen bey dem lezten Verfahren, die Jeder, bey einiger Uebung, sich selbst abstrahiren wird.

Fall, so muß die niedrigste Classe, welche wegen der Beschränktheit der Elemente, zu der vorgeschriebenen Summe möglich ist, erst anderweitig hervorgebracht werden. Alsdann dividirt man die Summe durch das höchste vorhandene Element, setzt für jede Einheit des Quotienten dieses Element selbst, und, voran dieser Reihe gleicher Elemente, den Rest, welcher bey der Division etwa geblieben ist: dadurch erhält man die erste Form der niedrigst möglichen Classe, zu welcher die übrigen, der nemlichen Classe angehörigen, am bequemsten durch das coordinirende Verfahren gefunden werden können. Um aber aus allen Formen einer gewissen Classe zu vorgeschriebener Summe, alle Formen der nächsthöheren Classe zu derselben Summe abzuleiten, setze man den ersteren, indem man ihr Endelement um Eins verringert, und diejenigen weglässt, welche schon Eins zum Endelement haben, folglich keine solche Verringerung mehr gestatten, Eins wieder vor, so hat man wenigstens alle die Formen der neuen Classe, welche Eins an der Spitze führen können. Und nun gehe man von Ordnung zu Ordnung in dieser neuen Classe fort; in allen Formen, die ein gleiches Anfangselement haben, dieses um eine Einheit erhöhend, und dabey das Endelement um eine Einheit erniedrigend, mit Weglassung der Formen, die schon die Einheit zum Endelement haben. So gelangt man von einer Ordnung allmälig zur andern; nur daß man, bey Beschränktheit der Elemente, in den allmäligen Erhöhun-

gen die vorgeschriebene Grenze nicht überschreite *t*). Man könnte auch, bey der zweyten Methode, aus den

---

t) Bey unbegrenztem Fortschritt der Elemente sind z. E. die Variationen zur Summe 7 nach ihren verschiedenen Classen folgende:

$^7\overset{1}{V}$	$^7\overset{2}{V}$	$^7\overset{3}{V}$	$^7\overset{4}{V}$	$^7\overset{5}{V}$	$^7\overset{6}{V}$	$^7\overset{7}{V}$
7	16	115	1114	11113	111112	1111111
	75	124	1123	11122	111121	
	34	133	1132	11131	111211	
	43	142	1141	11212	112111	
	52	151	1213	11221	121111	
	61	214	1222	11311	211111	
		223	1231	12112		
		232	1312	12121		
		241	1321	12211		
		313	1411	13111		
		322	2113	21112		
		331	2122	21121		
		412	2131	21211		
		421	2212	22111		
		511	2221	31111		
			2311			
			3112			
			3121			
			3211			
			4111			

Wäre hingegen die Reihe der Elemente nur bis 4 gegangen, so wäre 34 die arithmographisch niedrigste Form gewesen, die aus $^7\overset{2}{V}$ hätte beybehalten werden dürfen, und eben so müssten aus den folgenden Classen die Formen weggelassen werden, worin höhere Elemente als 4 vorkommen. Hier ist offenbar das von Classe zu Classe aufsteigende Verfahren mangelhaft, denn man muß bey dem Fortschreiten zu einer neuen Classe auch auf die Formen der vorhergehenden Rücksicht nehmen, die wegen der Be-

Variationsformen der vorhergehenden Classe dadurch zu denen der folgenden für die nemliche Summe gelangen, daß man jede dieser gegebenen Formen nähme, und ihr Endelement auf alle mögliche Arten in zwey Theile zerfällte, wobey diejenigen, deren Endelement schon Eins wäre, nicht in Anschlag genommen werden dürften. Ueberhaupt lassen sich die Regeln der Variation zu bestimmten Summen auf mancherley Arten modificiren.

Will man endlich, bey der Bildung einer Variationsclasse zu vorgeschriebener Summe, alle Formen der nächstvorhergehenden Classe zu allen niedrigern Summen als bekannt voraussetzen, so wird die Regel so lauten: man nehme allmälig jede Gruppe von Formen der vorigen Classe, die einer niedrigeren Summe zugehört, und füge ihren Formen das Element bey, welches ihre Summe zu derjenigen ergänzt, die in den verlangten Formen der nächsthöheren Classe herrschen soll. Diese Regel ist es, die man mechanisch bey dem gemeinen Multiplicationsverfahren befolgt. Ihre Anwendung ist nur da statthaft, wo man alle Glieder eines zusammengesetzten Products erhalten will, aber ihre Form ist, wie sich in der Folge zeigen wird, von hoher analytischer Wichtigkeit.

---

schränktheit der Elemente in dieser selbst nicht mitgenommen werden dürfen, und so Vieles am Ende wieder weglassen; was nur einstweilig zur Ableitung des Folgenden nöthig gewesen ist.

Die eben dargestellten Vorschriften sind hinlänglich, um das Product mehrerer, nach Potenzen einer bestimmten Hauptgröße fortschreitender Reihen von gleichförmigem Bau zu erzeugen, und sowohl im Ganzen, als im Einzelnen, die Gesetze seiner Bildung anzugeben. Wir wollen bey dem einfachsten Falle einer solchen Multiplication zuerst von ihnen Gebrauch machen.

Wir nehmen also beliebig viele zweytheilige Factoren an, die, um verschiedene zu seyn, jeder im ersten Theile eine besondre, beliebige, Größe, im zweyten hingegen alle die erste Potenz der Hauptgröße enthalten mögen. (In Zeichen, wir nehmen als Factoren $A+x$, $B+x$, $C+x$, u. s. w.). Wir wollen untersuchen, was für eine, nach Potenzen der Hauptgröße fortschreitende Form, ihr Product seyn werde, und nach welcher Regel jedes beliebige Glied desselben gebildet sey.

Man bezeichne die ersten Glieder der Factoren sämtlich durch 1, die zweyten durch 2, und bilde aus den Elementen 1, 2, alle möglichen Variationsformen. Diese werden sich, wie immer, entweder durch verschiedenen Inhalt, oder durch geänderte Folge der Elemente von einander unterscheiden. Wo man nur zwey Elemente in seiner Gewalt hat, da kann Aenderung des Inhalts nur dadurch geschehn, daß man ein erstes Element herauswirft, um ein zweytes dafür an die Stelle zu setzen. Alle die Formen also, welche verschiedenen Inhalt besitzen, unterscheiden sich durch die Menge der zweyten Elemente, die sie enthalten; alle diejenigen, welche nur durch geänderte Folge der Elemente von einander ver-

schieden sind, enthalten natürlich auch die nemliche Menge zweyter Elemente. Nun aber bedeutet das zweyte Element immer dasselbe, nemlich die erste Potenz der Hauptgröße. Alle die Formen also, welche die nemliche Menge von zweyten Elementen in sich schließen, enthalten eine und ebendieselbe Potenz der Hauptgröße, und gehören zu einem Gliede des Products zusammen. Man verfährt also hier am bequemsten, wenn man erst aus den gegebenen Elementen, als unbedingt wiederholbar gedacht, alle Combinationsformen bildet, von denen die niedrigste bloß erste Elemente, jede folgende ein erstes Element weniger, und dafür ein zweytes mehr enthalten wird, und nachher jede von diesen Formen auf alle mögliche Arten permutirt. Alle die Formen, welche durch Permutation aus einander entstanden sind, gehören zu demselben Gliede; alle hingegen, wobey eine andre Combination gemacht worden ist, gehören zu verschiedenen Gliedern des Products.

Es mögen also zuerst die verschiedenen möglichen Combinationsformen vollständig abgeleitet seyn; hernach aber jede von diesen auf alle mögliche Arten permutirt erscheinen. Bey dem Beziehn dieser combinatorischen Formen auf die würklich gegebenen Reihen werden alsdann noch wesentliche Abkürzungen möglich. Zuerst deswegen, weil man sich um die Bedeutung der zweyten Elemente nicht weiter zu bekümmern braucht. Stehn verlangter Maßen alle die Formen zusammen, welche die nemliche Anzahl von zweyten Elementen enthalten, so kann man ein für allemal diese zweyten Ele-

mente aus ihnen allen absondern; sie bedeuten ein Product aus lauter gleichen Factoren, deren jeder die Hauptgröße ist, stellen also eine Potenz derselben dar, die gemeinschaftlicher Factor aller jener Formen ist, und ein für allemal als solcher aus ihnen abgesondert werden darf, um ihrer anderweitigen Summe als Factor wieder vorgesetzt zu werden. Nachdem dies geschehn ist, enthalten alle jene Formen nur noch erste Elemente; die eine zwar an Zahl eben so viele, als die andre, aber die eine nicht an den nemlichen Stellen wie die andre. Und jedes erste Element bekommt seine Bedeutung aus der Stelle, worin es steht, denn sie weist ihm die Reihe an, woraus es genommen werden soll, und es hat in einer andern Reihe einen andern Werth. Die Natur der Permutationen bringt es mit sich, daß die permutirten Elemente allmälig in alle möglichen Stellen neben einander rücken, welche in den Formen überhaupt vorkommen. Wenn also alle Permutationsformen, worin eine bestimmte Zahl erster Elemente liegen, vollständig vorhanden sind, so erscheinen in ihnen diese ersten Elemente allmälig auf allen möglichen Stellen, welche die Form gestattet, so daß es das eine Mal nicht dieselben Stellen sind, welche sie besetzen, als das andre Mal. Das heisst also: man wird, bey der Beziehung jener Formen auf die gegebenen Reihen, zwar immer dieselbe Menge erster Theile aus ihnen als Factoren zusammenstellen, aber diese ersten Theile werden das eine Mal aus andern Reihen genommen seyn, als das andre Mal. Immer dieselbe

Menge erster Elemente nehmen, aber sie allmälig in alle möglichen Stellen rücken lassen, bedeutet also soviel, als: immer gleichviele aus den ersten Elementen der gegebenen Reihen zusammensetzen, aber sie dabey auf alle mögliche Arten aus verschiedenen Reihen nehmen. Diese Operation kann kürzer gefasst werden. Man setze bloß die ersten Glieder der gegebenen zweytheiligen Größen als eine besondre Reihe von Elementen hin; aus ihr auf alle mögliche verschiedene Arten eine bestimmte Menge von Elementen zusammenstellen, heißt Combinationen unwiederholbarer Elemente zu einer vorgeschriebenen Classe bilden; eine Operation wofür die Regeln vorher ausführlich entwickelt sind. Dem gemäß kann also das Gesetz für die Erzeugung eines Products aus den angenommenen zweytheiligen Factoren folgendermaßen ausgesprochen werden. Man stelle eine Form auf, in derem Anfangsgliede noch keine Potenz der Hauptgröße vorkommt, in deren folgenden Gliedern aber die successiven Potenzen eben derselben, allemal von der nemlichen Höhe, wie die Zahl des folgenden Gliedes, erscheinen, so daß, im lezten und höchsten, eine Potenz, deren Grad der Anzahl vorhanden Factoren gleichkommt, gesezt werde. Die Coefficienten dieser Glieder bilden sich aus den ersten Theilen der angenommenen Factoren. Sie sind Combinationen aus diesen, als nicht wiederholbar angenommenen Größen; jeder von ihnen ist ein Inbegriff aller Combinationsformen, die zu einer bestimmten Classe gehören, die Elemente der einzelnen Formen als

Factoren eines Products, die Formen selbst als Theile eines Ganzen gedacht. Was für eine Classe von Combinationsformen einen gewissen Gliede angehören wird sogleich dadurch bestimmt, daß der Grad der Classe, und die Zahl des Gliedes, oder, was mit der lezteren einerley ist, der Exponent der Hauptgröße, welche in diesem Gliede vorkommt, zusammengenommen die Zahl ausmachen müssen, welche die Menge der vorhandenen zweytheiligen Factoren ausdrückt. (In Zeichen Es sollen die Factoren: $(A+x)$, $(B+x)$, $(C+x)\ldots.$ $(N+x)$ mit einander multiplicirt werden; das Product wird eine Form seyn, die mit einem Gliede, worin x^0 vorkommt, anhebt, dann in den folgenden Gliedern allmälig x^1, x^2, u. s. w., im lezten x^n enthalten wird. Um die Coefficienten zu bilden, sehe man die Größen A, B, C, ...N, als Elemente einer eigenen Reihe an, woraus Combinationen gebildet werden sollen, und es wird der Coefficient des Anfangsgliedes, worin x^0 vorkommt, $\overset{n}{C}$; der des ersten, x^1 enthaltenden $\overset{n-1}{C}$; allgemein des r^{ten} nach dem anfänglichen, worin x^r vorkommt, $\overset{n-r}{C}$ seyn, das allerlezte aber, in welchem x^n erscheint, wird 1 zu seinem Coefficienten haben. Zusammengezogen: es ist $(A+x).(B+x).(C+x)\ldots.(N+x) = \overset{n}{C}x^0 + \overset{n-1}{C}x + \overset{n-2}{C}x^2 \ldots. + \overset{n-r}{C}x^r \ldots. + 1\,x^n$, wenn sich das Zeichen der Combination auf die Reihe A, B, C, ...N. bezieht). Daß man die Factoren des ersten Grades, und dem gemäß

auch das Product eben so gut auch hätte fallend anordnen können, bedarf wohl keiner Erinnerung.

Vermöge dieser Regel sind wir im Stande, die Erzeugung eines Products aus Factoren des ersten Grades, auf die leichteste combinatorische Arbeit, Combination unwiederholbarer Elemente zurückzuführen, und jedes einzelne Glied desselben ohne alle Mühe anzugeben. Käme es nur auf ein einzelnes Glied an, so würde nur eine Combinationsclasse aus einer Reihe gegebener Elemente gefodert, und in diesem Falle würde das coordinirende Verfahren bey der Ableitung der einzelnen Formen das zweckmäßigste seyn. Wollte man aber das ganze Product mit allen seinen Coefficienten vollständig erhalten, zu welchem Zwecke alle Combinationsclassen aus den gegebenen Elementen vollständig gebildet werden müssen, so wäre ohne Zweifel das coordinirende, welches von den Formen einer gewissen Classe zu denen der nächsthöheren aufsteigt, das zweckmäßigste. Und wenn man bedenkt, daß hier die einzelnen Elemente der Formen sich multipliciren, die Formen selbst aber in eine Summe zusammenfließen, so findet man leicht folgende Regel heraus, wodurch die Summe aller Combinationsformen, die der nemlichen Classe angehören, am kürzesten gefunden werden kann, ohne daß es eines eigenen combinatorischen Index dazu bedarf. Man setze anfangs die gegebenen Elemente einzeln nebeneinander, und summire sie vom Ende rückwärts, so daß unter jedes die Summe gesetzt wird,

die bey seiner Addition zu allen folgenden herauskommt. Die allererste dieser Summen lasse man weg; unter die folgenden setze man die Elemente in natürlicher Ordnung, und multiplicire jede mit dem unter ihr stehenden Elemente. Diese Producte behandle man wieder, wie anfangs die einzelnen Elemente; man setze unter jedes von ihnen das, was herauskommt, wenn man es mit allen nachfolgenden zusammenaddirt. Die allererste dieser Summen wird, wie vorhin, weggelassen; unter die folgenden setzt man aufs Neue die einzelnen Elemente, und in dieser Ordnung schreitet das Verfahren fort, so lange es möglich ist. Die dabey allmälig weggelassenen ersten Summen sind eigentlich die Zahlen, welche berechnet werden sollten; sie enthalten die gefoderten Summen der successiven Combinationsclassen aus den gegeben Dingen, und zwar in der Ordnung, in welcher sie selbst hervorgehn *u*). Der Grund,

---

u) Sollte man das Product der Factoren: $(1+x)$ $(3+x)$ $(5+x)$ $(6+x)$ $(10+x)$ berechnen, und würde bloß für ein einzelnes Glied desselben, z. E. das zweyte nach dem anfänglichen, der Ausdruck verlangt, so müsste man, aus den Größen 1, 3, 5, 6, 10, im angegebenen Sinne, $\overset{3}{C}$ berechnen, um es als Coefficienten neben x^2 zu setzen. Alsdann müsste man für die Dinge 1, 3, 5, 6, 10,

den Index 1, 2, 3, 4, 5, einführen,

um aus diesem zuerst $\overset{3}{C}$ zu bilden, welches die Formen 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345 begreift. Hierauf setzte man für die Elemente des Index ihre Werthe, und berechnete die einzelnen,

dieses Verfahrens beruht offenbar auf der bekannten Regel des Combinirens: alle Formen der vorhergehenden Classe, welche höher, als mit einem gewissen Elemente anfangen, zusammengenommen, stellen den Inbegriff derjenigen dar, welchen eben dieses Element bey der

---

durch die Formen angedeuteten Producte aus ihnen, 15, 18, 30, 30, 50, 60, 90, 150, 180, 300; die Summe aller dieser Producte, 923, wäre der gesuchte Coefficient, und $923x^2$ würde das verlangte dritte Glied des Products seyn. Wollte man aber alle Glieder des Products vollständig erhalten, so nähme die Rechnung folgendes Schema an.

		1, 3, 5, 6, 10
Summen vom Ende	25)	24, 21, 16, 10
Die Elemente		1, 3, 5, 6
Producte		25, 63, 80, 60
Summen vom Ende	228)	203, 140, 60
Die Elemente		1, 3, 5
Producte		203, 420, 300
Summen vom Ende	923)	720, 300
Die Elemente		1, 3
Producte		720, 900
Summen vom Ende	1620)	900
Die Elemente		1
Product	900)	

Und damit hätte man, in den allmälig abgesonderten ersten Summen der successiven Operationen, die Coefficienten des gesuchten Products, welches auf diese Weise: $900 + 1620x + 923x^2 + 228x^3 + 25x^4 + x^5$ seyn würde.

Erzeugung aller Formen für die nächsthöhere Classe vorgesetzt werden darf.

Ein solches Product aus Factoren des ersten Grades hat für die allgemeine Arithmetik eine große Erheblichkeit. Eben so, wie sich aus Factoren dieser Art durch Multiplication eine Form von höherem Grade bilden lässt, wird auch das umgekehrte Verfahren: Zerfällung einer Form von höherem Grade, die als Product mehrerer Formen des ersten gedacht wird, in diese ihre einfachen Factoren, wenigstens problematisch verlangt werden können. Aber die Auflösung dieser lezten Aufgabe fällt mit der allgemeinen Auflösung von Gleichungen beliebig höherer Grade völlig zusammen, wie eine genauere Analyse der Untersuchung sogleich zeigen wird.

Fünftes Kapitel.

Von der Zerfällung höherer Formen in Producte aus einfachen Factoren, oder der Auflösung von Gleichungen höherer Grade.

Eine Gleichung entsteht allemal, sobald Ausdrücke, in denen bestimmte arithmetische Operationen an beliebigen Zahlen vorgeschrieben sind, als gleiche Resultate hervorbringend (welches das gewöhnliche Gleichheitszeichen = ausdrücken soll) dargestellt werden. Ge-

meiniglich ist unter jenen Zahlen eine, die als Hauptgröße gedacht und bezeichnet wird, während die übrigen nur als Nebengrößen betrachtet werden. Kommen in den einzelnen Theilen der Ausdrücke nur Potenzen der Hauptgröße von ganzen und positiven Exponenten vor, durch andre Nebengrößen nach Belieben multiplicirt oder dividirt, so heisst die Gleichung eine entwickelte, und nimt ihren Grad vom Range der höchsten Potenz an, auf welche, in irgend einem Gliede, die Hauptgröße erhoben erscheint. Man kann durch Transposition alle Glieder einer solchen Gleichung auf die eine Seite des Gleichheitszeichens herüberschaffen, so daß auf der andern Seite o stehn bleibt; man kann auch durch Division alle Glieder mit der nemlichen Zahl das höchste Glied von seinem Coefficienten befreyen. Alsdann wird man einen Ausdruck vor sich liegen haben, der, nach den bekannten Gesetzen der Ordnung behandelt, die Grundform der Analysis darstellt, und dabey der Bedingung, daß alle seine Glieder, zusammengenommen, o ausmachen müssen, unterworfen ist.

Sind also alle Zahlen, woraus sich eine solche Form zusammengesetzt hat, bestimmt und bekannt, so müssen sie von selbst diese gefoderte Summe hervorbringen. Wären aber eine oder mehrere von ihnen unbestimmt geblieben, also durch unbestimmte Zeichen angedeutet, so entstände mit Recht die Frage: ob sie wohl so eingerichtet werden könnten, daß die Foderung der Gleichung dadurch befriedigt würde; und was für bestimmte Werthe man ihnen zu dieser Absicht geben müsste.

Besonders wichtig ist in dieser Rücksicht der Fall, wo man sich die Hauptgröße, nach deren Potenzen die Form fortschreitet, als unbestimmt denkt, und den gemäß bezeichnet, während die übrigen Nebengrößen als bestimmte und individuell gegebene Größen gedacht werden. Die Untersuchung, ob sich für jene Hauptgröße Werthe finden lassen, welche die Foderungen des angenommenen Ausdrucks befriedigen, wird gewöhnlich Auflösung der Gleichungen genannt; diese Werthe selbst Wurzeln der Gleichung. Ihre Ausführung hängt unmittelbar mit den vorhergehenden Betrachtungen zusammen. Aus der Multiplication beliebig vieler willkührlich angenommener Factoren des ersten Grades entspringt, ihnen gemäß, eine bestimmte Form von höherem Grade. Umgekehrt also ist wenigstens die Möglichkeit denkbar, eine geradezu gegebene Form von höherem Grade als ein Product aus Formen des ersten Grades zu betrachten, und in ihre erzeugenden Factoren wieder aufzulösen. Ließe sich diese Möglichkeit immer realisiren, so hätte man die Auflösung der Gleichungen gefunden.

Denn es sey eine solche höhere Form gegeben, und man habe sie als ein Product sovieler Factoren des ersten Grades, wie ihr Exponent Einheiten enthält, dargestellt. Man verlangt also, indem man sie = o setzt, daß ein Product aus Factoren = o werden soll. Ein Product kann aber nur alsdann = o werden, wenn irgend einer der Factoren es wird, sey es auch welcher es wolle. Will man also alle möglichen Voraussetzungen haben, unter denen jene Foderung erfüllt werden kann,

so nehme man allmälig jeden einzelnen Factor des Products, fragend, ob es möglich sey, ihn, durch eine bestimmte Voraussetzung in Absicht auf die noch unbestimmte Hauptgröße, = 0 zu machen. Aber jeder solcher Factor ist eine Form des ersten Grades; eine solche = 0 setzen, heisst eine Gleichung des ersten Grades aufstellen, deren Auflösung niemals Schwierigkeiten haben kann. Man setze nur aus dieser Form des ersten Grades die bekannte Nebengröße, welche als Theil neben der ersten Potenz der Hauptgröße steht, transponirend, mit entgegengesetztem Zeichen auf die andre Seite der Gleichung hinüber. In dieser Gestalt wird sie den bestimmten Werth darstellen, den die Hauptgröße haben müsste, wenn jene Form des ersten Grades = 0 werden sollte. Man wird, bey vollständiger Durchführung der Untersuchung, so viele neben einander bestehende Werthe der Hauptgröße finden, als das Product Factoren, oder die anfängliche Form Einheiten in ihrem Range gehabt hat; Werthe die in der Regel ganz von einander verschieden seyn werden, obgleich jeder von ihnen der anfänglichen Foderung Genüge leistet. Ist also nur jene Zerfällung eines Products in Factoren möglich, so gilt gewiß auch der allgemeine Satz: es giebt für jede Gleichung so viele, von einander unabhängige Werthe der unbekannten Größe, als ihr Grad Einheiten in sich schließt.

Auch das Umgekehrte dieses Satzes lässt sich leicht beweisen. Giebt es für eine beliebig angenommene höhere Gleichung irgend einen bestimmten Werth der

unbekannten Größe, welcher den Foderungen der Gleichung Genüge leistet, das heist, für die unbekannte Größe allenthalben an die Stelle gesetzt, den Betrag aller in der Form der Gleichung liegender Glieder = 0 werden lässt, so ist die Form der Gleichung unfehlbar ein Product aus einem bekannten Factor des ersten Grades in eine andere geschlossene Form. Man setze in der einfachen Gleichung, die jenen genugthuenden bestimmten Werth der unbekannten Größe darstellt, das bekannte Glied auf die andre Seite des Gleichheitszeichens, so wird man eine Form des ersten Grades erhalten. Durch sie muß sich die Form der Gleichung dividiren lassen, so, daß kein Rest dabey zurückbleibt. Denn da dieser Divisor zweytheilig ist, so wird der Rest, welcher bey jeder partiellen Division übrig bleibt, nur aus einem einzigen Theile bestehn können. Man setze die Division so weit fort, bis der zurückbleibende Rest, wenn es einen solchen gäbe, gar keine Potenz der Hauptgröße mehr enthält, sondern eine bloß bestimmte Zahl wird. Alsdann muß, dem Grundbegriffe der Division gemäß, das Product aus dem Divisor in den Quotienten, nebst dem übriggebliebenen Reste, den Dividend identisch wiedergeben. Der Dividend sollte angenommener Maßen = 0 seyn, wenn man für die Hauptgröße jenen bestimmten Werth an die Stelle setzte. Das Product aus dem Divisor in den Quotienten wird es gleichfalls, da sein einer Factor, der Divisor nemlich, eine aus eben jenem Werthe der Hauptgröße gebildete Form des ersten

Grades ist. Es muß also auch der Rest unter der nemlichen Voraussetzung $= 0$ seyn. Denn wenn von einem Ganzen (dem Dividend), welches verschwinden soll, der eine Theil (das Product aus dem Divisor in den Quotienten) für sich $= 0$ wird, so muß der andre Theil desselben (der Rest) gleichfalls für sich $= 0$ werden. Aber dieser Rest enthält die Hauptgröße gar nicht; man mag für dieselbe jeden beliebigen Werth setzen, und er wird dadurch nicht afficirt werden; er muß also in sich selbst $= 0$, das heisst er muß würklich gar nicht vorhanden seyn.

Man bedient sich des lezten Satzes sehr häufig bey Gleichungen höherer Grade, für welche, auf irgend eine Art, wenigstens ein genugthuender Werth der unbekannten Größe gefunden ist. Man bildet aus diesem Werthe eine Form des ersten Grades, dividirt die Form der Gleichung durch dieselbe, und hat alsdann, bey den ferneren Untersuchungen über die Möglichkeit noch andrer Werthe der unbekannten Größe, nur auf den bey der Division entwickelten Quotienten, welcher unfehlbar eine Form von einen um eine Einheit niedrigerem Grade seyn wird, Rücksicht zu nehmen.

Eine allgemeine Methode für die Auflösung der Gleichungen giebt es nicht. Alle dahin abzweckenden Untersuchungen sind mit vielfachen Schwierigkeiten verbunden, die man am besten bey der Betrachtung der einfachsten, zum Theil einer genügenden Behandlung fähigen Fälle, kennen lernen kann.

Eine Gleichung wird vom zweyten Grade, oder quadratisch genannt, wenn keine höhere Glieder als solche, in denen die zweyte Potenz der unbekannten Größe vorkommen, in ihr enthalten sind. Wird sie auf o gebracht, und sind ihre Glieder gehörig zusammen geordnet, so auch das höchste Glied ihrer Form von seinem Factor oder Coefficienten befreyt, so stellt sich in ihr eine Summe von drey, successiv im Range um eine Einheit verschiedenen Theilen dar, die $= o$ ausmachen soll ($x^2 + fx + g = o$). Um zu sehn, ob nicht eine solche Form ein Product aus zwey Factoren des ersten Grades seyn könne, fingire man solche würklich ($x + A$ und $x + B$), und berechne ihr Product. Dieses wird eine Form des zweyten Grades ($x^2 + (A + B)x + AB$). Der Coefficient des ersten Gliedes in ihm nach dem höchsten, ist dem Gesetze einer solchen Multiplication gemäß die Summe ($A + B$), der Coefficient des zweyten das Product ($A . B$), aus den lezten Theilen der angenommene Factoren. Diese Coefficienten müssen aber mit denen der gleichhohen Glieder in der anfänglichen Form identisch seyn, wenn unsere Voraussetzung bestehn soll. Die Frage ist also jezt auf die zurückgebracht, ob zwey noch unbekannte Größen sich allemal bestimmen lassen, wenn so wohl für ihre Summe, als ihr Product, bekannte Werthe gegeben sind ($A + B = f$, und $A . B = g$). Diese Frage aber beantwortet sich durch Anwendung eines leichten Kunstgriffs allemal bejahend. Man erhebe die Summe zum Quadrat ($A^2 + 2AB + B^2 = f^2$), und ziehe von

diesem das vervierfachte Product ($4AB = 4g$) wieder ab; der Rest giebt das Quadrat der Differenz eben jener Größen ($A^2 - 2AB + B^2 = f^2 - 4g$). Man ziehe aus dem Quadrate der Differenz die Wurzel des zweyten Grades, so hat man die Differenz selbst ($A - B = \sqrt{(f^2 - 4g)}$. Jezt also ist die Summe, und zugleich die Differenz von zwey unbekannten Größen gegeben. In einem solchen Falle aber sind bekanntlich beyde leicht gefunden. Die halbe Summe, zur halben Differenz gesetzt, gibt die eine ($A = \frac{f + \sqrt{(f^2 - 4g)}}{2}$); die halbe Summe, um die halbe Differenz verringert, gibt die andre ($B = \frac{f - \sqrt{(f^2 - 4g)}}{2}$). Die Zerfällung einer Form vom zweyten Grade läßt sich also auf bestimmte Rechnungen mit den Coefficienten dieser Form zurückführen.

Man kann das nemliche Resultat noch auf einem andern Wege erhalten, wobey man die gegebene Gleichung des zweyten Grades durch gestattete Operationen auf eine andre vom ersten Grade zurückführt. Der Kunstgriff bey diesem Verfahren kommt bloß darauf an, die Form der Gleichung zur Ausziehung der Quadratwurzel geschickt zu machen. Man setze das völlig bekannte Glied der anfänglichen Form ($x^2 + fx + g = 0$), auf die andre Seite des Gleichheitszeichens hinüber ($x^2 + fx = - g$). Die beyden unbekannten Glieder auf der ersten Seite können als die beyden ersten Producte des Quadrates einer zweytheiligen Größe ange-

sehn werden; das erste (x^2) als das Quadrat des ersten Theils, das zweyte (fx) als das doppelte Product des ersten Theils (x) in den zweyten ($\frac{1}{2}f$); wenn man also nur auf beyden Seiten das Quadrat des zweyten Theils ($\frac{1}{4}f^2$) hinzuaddirt, wodurch die Gleichheit nicht leidet, und auf der andern Seite der Gleichung nichts Unbekanntes entsteht, so hat man alsdann eine Gleichung, worin das Quadrat einer Form des ersten Grades einer bekannten Größe gleich gesetzt wird ($x^2 + fx + \frac{1}{4}f^2 = (x + \frac{1}{2}f)^2 = \frac{1}{4}f^2 - g$). Zieht man also auf beyden Seiten die Quadratwurzel aus, so gelangt man zu einer Form des ersten Grades, ($x + \frac{1}{2}f$) $= \sqrt{(\frac{1}{4}f^2 - g)}$, aus welcher, durch eine einfache Transposition, der Werth der unbekannten Größe gefunden werden kann ($x = -\frac{1}{2}f + \sqrt{(\frac{1}{4}f^2 - g)}$). Die Zusammenstimmung dieses Resultats mit dem vorigen erhellet sogleich bey angestellter Vergleichung.

Wenn also Auflösung einer quadratischen Gleichung soviel heissen soll, als Zurückführung der unbekannten Größe auf arithmetische Ausdrücke, in denen bestimmte Rechnungen mit bekannten, und in den Gliedern der Gleichung als Coefficienten gegebenen Zahlen verlangt werden, so ist offenbar jede quadratische Gleichung auflösbar. Und es wird in ihr allemal nothwendig zwey Werthe der unbekannten Größe geben, weil in dem einen Theile ihres Ausdrucks $\sqrt{(\frac{1}{4}f^2 - g)}$ die Ausziehung der Quadratwurzel aus einer bestimmten Zahl gefodert wird, welches immer, bekannten Gesetzen der Arithmetik gemäß, zwey verschiedene Resultate, der

Größe nach gleich, dem Zeichen nach entgegengesetzt, mit sich bringt. Soll aber Auflösung einer Gleichung soviel seyn, als Angabe einer bestimmten Zahl, die den Foderungen der Gleichung Genüge leistet, so sind offenbar die wenigsten quadratischen Gleichungen einer solchen fähig. Denn es ist schon aus der Arithmetik bekannt, daß sich nur sehr selten Ausziehungen der Quadratwurzel aus beliebig angenommenen Zahlen vollführen lassen. Wenn der Ausdruck, an welchem diese Operation geschehn soll, eine negative Zahl ist ($\frac{1}{4}f^2 - g$ negativ, d. h $\frac{1}{4}f^2$ kleiner als g), so ist es eine Unmöglichkeit sie zu verrichten. In diesem Falle also lässt sich durchaus keine bestimmte Zahl angeben, die den Foderungen der Gleichung Genüge leistete. Alsdann pflegt man, mit einem sehr uneigentlichen Ausdrucke, zu sagen, die Gleichung habe durchaus unmögliche Wurzeln, oder die Werthe der unbekannten Größe seyen unmögliche Größen. Man will eigentlich dadurch nur anzeigen, daß die unbekannte Größe, wenn sie bestimmt werden sollte, Rechnungen mit bekannten Zahlen erfodert, die den Grundgesetzen aller Zahlenverknüpfungen widersprechen. Gewohnt in der Elementar-Arithmetik alle aus Zahlen zusammengesetzte Ausdrücke, ob schon die Operationen wodurch sich die Zahlen erst verbinden sollen, nur angedeutet sind, schon zum Voraus als würkliche Zahlen zu betrachten (weil in der That jede durch die vier Grundoperationen der Arithmetik zu stiftende Zahlenverbindung, sobald man will, in eine bestimmte Zahl umgesetzt werden kann), behält man

diesen Sprachgebrauch auch da bey, wo er nicht mehr statthaft ist. Denn höhere arithmetische Operationen, wie z. E. die Wurzelausziehungen, verhalten sich ganz anders, als die ursprünglichen, und sehr oft kann in ihnen Etwas gefodert werden, was durchaus unmöglich ist.

Indessen haben solche, Unmöglichkeiten verlangende arithmetische Ausdrücke dennoch in der Wissenschaft ihren guten Nutzen, und es wird vermöge ihrer die Zurückführung des Unbekannten auf Operationen mit bekannten Zahlen völlig geleistet. Ja es kann sogar oft nöthig seyn, von der Unmöglichkeit ihrer Realisirung ganz zu abstrahiren; die Fiction zu macheu, als wenn sie würkliche bestimmte Zahlen bedeuten könnten, und dem gemäß den gewöhnlichen Gesetzen der Rechnung unterworfen wären. Ein solches hypothetisches Rechnen mit zusammengesetzten Ausdrücken, welches an sich ein bloßes Spielen mit Zeichen ist, und gewöhnlich ziemlich unschicklich Rechnen mit unmöglichen Größen genannt wird, kann oft zu sehr reellen Resultaten führen; eine vorläufige Bemerkung, wovon sich die Bestätigung im Folgenden zeigen wird *v*).

v) Die quadratische Gleichung $x^2 - 4x + 8 = 0$, gibt, aufgelößt, $x = 2 + \sqrt{-4}$, fodert also Etwas unmögliches. Will man gleichwohl diesen Ausdruck ansehn, als wäre er eine würkliche Zahl, und den gewöhnlichen Gesetzen der Zahlenverknüpfung unterworfen, so wird man finden, daß er den Foderungen der Gleichung Genüge leistet, d. h. daß er, für x in die Glieder der Gleichung gesetzt, würklich o

Wenn aber auch keine absolute Unmöglichkeit in der Ausziehung der Quadratwurzel liegt (wenn also $\frac{1}{4}f^2 - g$ positiv, mithin $\frac{1}{4}f^2$ größer als g ist), so wird doch meistens eine eigentliche Ausziehung der Quadratwurzel nicht gestattet seyn, weil der Ausdruck ein irrationaler ist. Das heisst, man wird keine Zahl finden können, die den Foderungen der Gleichung unbedingt entspräche, wohl aber unter allen Zahlen einer gewissen Form (ganzen Zahlen oder Brüchen von beliebig gewähltem Nenner) diejenige, welche unter allen der nemlichen Form am wenigsten von der Erfüllung der vorgeschriebenen Bedingung abweicht. Man wird es in seiner Gewalt haben die gesoderte Quadratwurzel in ganzen Zahlen, oder in Brüchen jedes beliebig vorgeschriebenen Nenners auszuziehn.

Was sich schon bey quadratischen Gleichungen ereignet, wird auch bey Gleichungen höherer Grade nicht ausbleiben. Die Coessicienten der Form können rationale, ja bloß ganze Zahlen seyn, und dennoch die Wurzeln der Gleichung durch irrationale, oder gar unmögliche Ausdrücke dargestellt werden. Darin beruht schon eine von den großen Schwierigkeiten der Auflösung höherer Gleichungen. Es giebt aber deren noch

---

hervorbringt. Alsdann wird

$$\begin{array}{ll} x^2 = (2+\sqrt{-4})^2 = & 4+4\sqrt{-4}+(-4) \\ -4x = & -8-4\sqrt{-4} \\ +8 = & +8 \\ \hline \end{array}$$

Die Summe beträgt, weil die unmöglichen Ausdrücke sich in ihr aufheben $4-8+8-4=0$.

mehrere, wie schon die Betrachtung der cubischen Gleichungen zeigen kann.

Eine Gleichung wird cubisch, oder vom dritten Grade genannt, wenn sie kein höheres Glied in sich schließt, als ein solches, worin die dritte Potenz der unbekannten Größe vorkommt. Auf o gebracht und gehörig geordnet, stellt sie, nachdem der Coefficient des höchsten Gliedes durch Division fortgeschafft ist, eine regelmäßige Form des dritten Grades dar ($x^3 + ax^2 + bx + c = 0$). Insofern also hat sie dieselbe Gestalt, welche ein Product aus drey einfachen Formen des ersten Grades bekommen würde.

Es giebt eine Art von cubischen Gleichungen, die man leicht auflösen, und für die man drey von einander unabhängige Werthe der unbekannten Größe nachweisen kann. Diejenigen nemlich, für welche, auf irgend eine Weise, ein einziger Werth der unbekannten Größe schon gefunden ist. Man kann aus diesem Werthe, auf die vorhin angegebene Art, einen Factor des ersten Grades bilden; die cubische Form wird sich durch ihn dividiren, und so als ein Product aus jenem Factor in eine Form des zweyten Grades darstellen lassen. Sie wird folglich o werden, nicht bloß wenn ihr erster Factor, sondern auch wenn der zweyte verschwindet. Man setze also jene quadratische Form o, dies gibt eine quadratische Gleichung die man auflösen, und woraus man also noch zwey Werthe der unbekannten Größe finden kann. Auf diese Art lassen sich z. E. bey den reinen cubischen Gleichungen (eine Gleichung wird rein

genannt, wenn sie nur zwey Glieder, ein bekanntes und ein unbekanntes enthält) drey verschiedene Werthe der unbekannten Größe nachweisen, von denen freylich zwey allemal Etwas unmögliches verlangen. (Es sey die reine cubische Gleichung zuerst $x^3 - a^3$. Alsdann ist offenbar $x = a$, eine Wurzel für sie; $x - a$ folglich ein Factor ihrer Form, die nach angestellter Division als das Product der beyden Factoren $x - a$, und $x^2 + ax + a^2$ erscheinen wird. Sie kann also auch $= 0$ werden, wenn der lezte Factor $x^2 + ax + a^2 = 0$ wird. Durch diese Annahme aber entsteht eine quadratische Gleichung, wovon die Wurzeln $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - a^2)}$, und $x = -\frac{a}{2} - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - a^2)}$ oder kürzer $x = \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ und $x = \frac{a}{2}(-1 - \sqrt{-3})$ sind. Wäre die cubische Gleichung $x^3 + a^3 = 0$ gewesen, so hätte sie eine Wurzel $x = -a$, ihre Form also einen Factor $x + a$ gehabt, und man hätte statt der Form das Product $(x + a).(x^2 - ax + a^2)$ setzen dürfen. Ihr letzter Factor, $x^2 - ax + a^2$, $= 0$ gesetzt, hätte $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - a^2)}$, kürzer $x = \frac{a}{2}.(1 \pm \sqrt{-3})$ gegeben.)

Eine in gänzlicher Vollständigkeit aller Glieder ausgedrückte cubische Gleichung sodert zusammengesetztere Kunstgriffe, wenn sie aufgelöst werden soll. Zuerst muß man, durch Einführung einer neuen unbekannten Größe, ihre Gestalt dahin verändern, daß das erste Glied nach dem höchsten in ihr nicht mehr vorkommt.

(Es sey die cubische Gleichung ($x^3 + ax^2 + bx + c = 0$). Man führe eine neue unbekannte Größe, y, ein, so, daß $x = y - \frac{1}{3}a$. Setzt man diesen Werth würklich in die anfängliche Form für x an die Stelle, so kommt

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 - ay^2 + \frac{1}{3}a^2y - \frac{1}{27}a^3 \\ + ay^2 = & + ay^2 - \frac{2}{3}a^2y + \frac{1}{9}a^3 \\ + bx = & by - \frac{1}{3}ba \\ + c = & + c \\ \hline 0 = & y^3 + (-\frac{1}{3}a^2 + b)y + (\frac{2}{27}a^2 - \frac{1}{3}ba + c) \end{array}$$

eine cubische Gleichung, in welcher offenbar das erste Glied nach dem höchsten nicht mehr vorhanden ist).

Angenommen nun, es sey eine cubische Gleichung in dieser lezten Gestalt ($y^3 + fy + g = 0$) würklich gegeben, so mache man die Voraussetzung, es lasse sich der Werth der unbekannten Größe in ihr durch die Summe zweyer Zahlen, deren jede eine Cubicwurzel aus bestimmten, und auf irgend eine Art mit den Coefficienten der gegebenen Gleichung zusammenhängenden Größen ist ($y = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$) darstellen. Um diese Voraussetzung zu prüfen und zu realisiren, setze man diesen fingirten Werth der unbekannten Größe würklich in der Gleichung für sie an die Stelle, die Bedingung, daß der Betrag aller Glieder $= 0$ seyn müsse, dabey verfolgend. (In der Form $y^3 + fy + g$ soll für y gesetzt werden: $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$. Es wird also $y^3 = A + 3 . \sqrt[3]{A^2} . \sqrt[3]{B} + 3 . \sqrt[3]{A} . \sqrt[3]{B^2} + B$. Die beyden mittleren Glieder dieses Ausdrucks lassen sich, wenn man den gemeinschaftlichen Factor aus ihnen absondert, zusammengezo-

gen durch $3 \cdot \sqrt[3]{(AB)} \cdot (\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B})$, oder, da der lezte Factor $= y$, durch $3 \cdot \sqrt[3]{(AB)} y$ darstellen. So ist also:

$$\begin{aligned} y^3 &= 3 \cdot \sqrt[3]{(AB)} \cdot y + (A + B) \\ fy &= \qquad f \cdot y \\ g &= \qquad\qquad g \end{aligned}$$

Addirt $0 = (3 \cdot \sqrt[3]{(AB)} + f) y + (A + B) + g$

Offenbar aber könnte dieser Foderung Genüge geleistet werden, wenn jedes Glied der Summe für sich $= 0$ würde, also $3 \cdot \sqrt[3]{(AB)} + f = 0$, und $(A + B) + g = 0$ wäre.

Dies also angenommen, erhalten wir zwey Gleichungen für die beyden fingirten unbekannten Größen. Die erste $3 \cdot \sqrt[3]{(AB)} = -f$, oder schicklicher geformt, $AB = -\frac{1}{27} f^3$; die andre $A + B = -g$. Und nun bedarf es nur der Erinnerung an das bey der Auflösung der quadratischen Gleichungen beobachtete Verfahren. Wir haben hier, wie dort, die Summe zweyer Größen, und ihr Product; wir werden also auf die nemliche Weise zur Bestimmung von jeder derselben gelangen. Es findet sich:

$$A = \frac{-g + \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27} f^3)}}{2} \text{ und}$$

$$B = \frac{-g - \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27} f^3)}}{2}. \quad \text{Mithin}$$

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{-g + \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27} f^3)}}{2}\right)}$$

$$+ \sqrt[3]{\left(\frac{-g + \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27} f^3)}}{2}.\right)}$$

Es ist also auch hier, wie vorhin bey den quadratischen Gleichungen, für die unbekannte Größe ein Werth im allgemeineren Sinne, das heisst eine Zusammensetzung der bekannten Zahlen in der Form der Gleichung durch bestimmte arithmetische Operationen, gefunden.

Aber es zeigen sich dabey neue Schwierigkeiten. Zuerst die, daß in diesem Ausdrucke, wenn er in seinem gehörigen Umfange genommen wird, nicht drey, sondern neun verschiedene Zahlenformen enthalten sind. Die Cubicwurzel aus einer bestimmten Zahl kann, wie wir vorher gesehn haben, durch drey verschiedene Ausdrücke gegeben werden. Die Summe von zwey, unbestimmt angedeuteten, Cubicwurzeln, lässt sich also offenbar auf neun verschiedene Arten realisiren, und es wird hier noch einer besonderen, neben der Auflösung hergehenden Regel bedürfen, um die der Gleichung genugthuenden Werthe darunter auszusuchen.

Ferner verlangt jeder der beyden Theile, wodurch die unbekannte Größe gegeben wird, Ausziehung der Cubicwurzel aus einer Größe, welche selbst zweytheilig, und wovon der lezte Theil eine Wurzelgröße des zweyten Grades ist. Sobald in dieser Wurzelgröße das, was unter dem Wurzelzeichen steht, negativ werden sollte, fodert sie Etwas unmögliches, und es kann aus dem Ganzen alsdann natürlich keine Cubicwurzel gezogen werden. Gleichwohl wird eine angestellte Probe sehr bald zeigen, daß gerade bey einer cubischen Gleichung, in welcher alle drey Wurzeln mögliche bestimmte

Zahlen sind, die Anwendung unsrer Formel auf solche unmögliche Ausdrücke führt *w*). Auf unserm gegenwärtigen Standpuncte sind wir nicht vermögend, diese Schwierigkeit zu beseitigen, weil uns eine Methode fehlt, um aus einer Größe, welche selbst schon Wurzelgrößen in sich schließt, Wurzeln höherer Grade auszuziehn. Diese kann erst im Folgenden gegeben, und so die hier angefangene Auflösung cubischer Gleichungen vollendet werden.

Es lässt sich auch für die Gleichungen des vierten Grades ein ähnliches Verfahren, wie bey den cubischen Gleichungen, in Anwendung setzen, um einen Ausdruck, welcher sich bloß aus den Coefficienten der Gleichung gebildet hat, für die unbekannte Größe zu erhalten. Indessen finden dabey wieder die nemliche Schwierigkeiten Statt. Für Gleichungen, die über den vierten Grad hinausgehn, gibt es keine solche Methode mehr, und bey ihnen fängt die (obschon noch nicht theoretisch erwiesene) Unmöglichkeit eines allgemeinen Ausdrucks der unbekannten Größe, womit alle übrigen Gleichun-

---

w) Eine cubische Gleichung, welche die Zahlen 1, 2, — 3, zu ihren Wurzeln hat, wird so aussehn: $x^3 - 8x - 6 = 0$. Wendet man die allgemeine Formel der Auflösung auf sie an, so findet sich, da hier $f = -8$, $g = -6$, $g^2 + \frac{4}{27}f^3 = \sqrt{-\frac{1886}{27}}$, also
$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{6 + \sqrt{-\frac{1886}{27}}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{6 - \sqrt{-\frac{1886}{27}}}{2}\right)},$$
wo also x durch die Summe zweyer Cubicwurzeln aus unmöglichen Ausdrücken gegeben wird.

gen höherer Grade im Allgemeinen behaftet sind, schon im ganzen Umfange an.

Von den weiteren Untersuchungen über diesen Gegenstand kann an dieser Stelle nur historisch Nachricht gegeben werden, weil die Kenntnisse der Analysis, welche dazu erfodert werden, noch nicht in unserer Gewalt sind.

Könnte der Satz allgemein bewiesen werden, daß jede Gleichung wenigstens eine Wurzel haben müsste (unter Wurzel irgend einen arithmetischen Ausdruck verstanden, der sich aus den Coefficienten der Gleichung durch bekannte arithmetische Operationen, die vier Species, Potenziirungen und Wurzelausziehungen, zusammengesetzt haben mögte), so würde dem Lehrsatze, welcher vorhin schon aufgestellt worden ist, zufolge, allerdings das allgemeine Theorem festgestellt werden dürfen, daß jede Gleichung von einem beliebigen höheren Grade so viele von einander unabhängige Wurzeln besitze, als der Exponent ihres Grades Einheiten enthält, wobey alsdann über den Zusammenhang dieser Wurzeln mit den Coefficienten in der Form der Gleichung das Gesetz gültig seyn würde, welches bey der Erzeugung von Formen höherer Grade aus Factoren des ersten Grades in Vorhergehenden abgeleitet ist.

Unter eben dieser Voraussetzung würde man behaupten dürfen, daß sich diejenigen Wurzeln einer Gleichung, welche unmögliche Ausdrücke in sich schließen, allemal auf solche zurückbringen ließen, die nur dadurch Etwas unmögliches bezeichnen, daß sie die Aus-

ziehung der Quadratwurzel aus einer negativen Zahl verlangen (auf die Form $a + b\sqrt{-1}$ oder $a - b\sqrt{-1}$, und a und b mögliche Größen verstanden). Denn es wird in der Folge bewiesen werden, daß jeder, noch so zusammengesetzte Ausdruck, wenn er nur aus der Verflechtung bekannter Zahlen durch beliebige bestimmte arithmetische Operationen erzeugt ist, sich auf eine solche Form würklich zurückführen lasse. Alsdann kann man auch den Satz feststellen, daß die unmöglichen Wurzeln einer Gleichung, wofern sie deren enthält, allemal paarweise vorhanden sind, indem nemlich eine Gleichung, welche $a + b\sqrt{-1}$ zur Wurzel hat, unfehlbar auch $a - b\sqrt{-1}$ zur Wurzel haben wird. Denn eine solche zweytheilige Größe, wie $a + b\sqrt{-1}$ oder $a - b\sqrt{-1}$, stellt, wenn sie auf eine beliebige Potenz von ganzen und positiven Exponenten erhoben wird, dem binomischen Lehrsatze gemäß, eine Reihe von Gliedern dar, welche die successiven Potenzen des zweyten Theils $(b\sqrt{-1})$, von der 0ten an, in regelmäßiger Folge in sich schließen. Ein Glied von ungerader Zahl enthält eine eben so hohe ungerade Potenz; ein Glied von gerader Zahl eine eben so hohe gerade Potenz dieser Größe. Aber eine ungerade Potenz einer solchen Größe, $(b\sqrt{-1})^{2n-1}$, die bekannten Gesetze der Rechnung mit Wurzelgrößen auf sie angewendet, als wenn sie eine würkliche Zahl bedeutete, stellt noch immer Etwas unmögliches dar ($(b\sqrt{-1})^{2n-1} = b^{2n-1} . (\sqrt{-1})^{2n-1} = (-1)^n b^{2n-1} . (\sqrt{-1})$). Hingegen eine gerade Potenz der nemlichen Größe gibt immer Et-

was mögliches ($(b\sqrt{-1})^{2n} = (-1)^n \cdot b^{2n}$). Es zerfällt also das Resultat der ganzen Potenziirung einer solchen zweytheiligen Größe in zwey Theile, einen möglichen und einen unmöglichen. Alle geraden Glieder der berechneten Potenz, zusammengenommen, geben den möglichen Theil; alle ungeraden Glieder, in eine Summe gezogen, den unmöglichen. Wenn also in der Form einer Gleichung für die Hauptgröße ein solcher Werth ($a + b\sqrt{-1}$) an die Stelle gesetzt wird, so vereinigen sich alle Glieder von gerader Zahl, welche aus den Substitutionen dieses Werths in die successiven Potenzen der Hauptgröße, welche die ganze Form enthält, entspringen, zu einem einzigen möglichen Ausdrucke, während alle ungeraden Glieder der einzelnen Entwicklungen, weil sie sämtlich Etwas unmögliches fodern (der Factor $\sqrt{-1}$ enthalten) zu einem einzigen, Unmögliches andeutendem, Gliede zusammengehn. Soll also ein solcher Werth, in die Form der Gleichung für die Hauptgröße gesetzt, 0 hervorbringen, so müssen alle aus den einzelnen Substitutionen entspringende Glieder von gerader Zahl für sich 0 betragen, und eben so alle Glieder ungerader Zahl gleichfalls für sich 0 ausmachen, weil mögliche Ausdrücke mit andern, die Unmöglichkeiten in sich schließen, nicht eine Summe bilden können. Hätte man aber statt $a + b\sqrt{-1}$ für die Hauptgröße substituirt $a - b\sqrt{-1}$, so wäre der Lauf der ganzen Entwicklung derselbe geblieben, weil diese zweytheilige Form der Größe nach dieselben Theile besitzt wie die vorige; es hätte sich nichts geändert als das Zeichen

der ungeraden Glieder, welches, eine ungerade Potenz des zweyten, jezt negativ gewordenen Theils enthaltend, nun negativ seyn müsste, während es vorher, wie die übrigen Glieder, gleichfalls positiv war. Man würde also, nach vollendeter Substitution, die nemlichen geraden Glieder wieder erhalten, und ihr Inbegriff würde auch jezt, wie er es vorhin gethan haben soll, für sich o ausmachen. Man würde, der Größe nach, gleichfalls die nemlichen ungeraden Glieder wieder bekommen, nur daß sie jezt sämtlich das umgekehrte Zeichen von demjenigen haben müssten, welches sie bey der vorigen Substitution besaßen. Aber, wenn alle diese ungeraden Glieder, vereinigt, sich einander gegeseitig aufhoben, so werden sie das Nemliche auch noch alsdann thun, wenn die Zeichen von ihnen allen umgekehrt werden. Es muß also im Ganzen bey der Substitution von $a - b\sqrt{-1}$ in die Form der Gleichung o herauskommen, sobald man angenommen hat, daß die Substitution von $a + b\sqrt{-1}$ würklich o hervorbringt.

Diesem Satze gemäß, darf, unter der anfänglichen Voraussetzung, behauptet werden, daß die unmöglichen Wurzeln einer Gleichung, wofern sie solche enthält, allemal paarweise vorhanden sind, so daß neben einer, in welcher das, was die Unmöglichkeit des Ausdrucks hervorbringt, das + Zeichen hat ($a + b\sqrt{-1}$), allemal noch eine zweyte vorhanden ist, die sich von jener ersten bloß dadurch unterscheidet, daß in ihr eben dabey das — Zeichen vorkommt ($a - b\sqrt{-1}$). Unter den Factoren des ersten Grades, aus denen sich die Form

der Gleichung zusammensetzt, sind also die beyden, welche aus diesen Werthen der unbekannten Größe entspringen $((x-(a+b\sqrt{-1})$ und $(x-(a-b\sqrt{-1}))$. Das Product aus diesen beyden Factoren des ersten Grades, nach den Regeln der gewöhnlichen Multiplication, als wenn sie hier gültig wären, berechnet, gibt eine Form des zweyten Grades $(x^2-2ax+a^2+b)$ deren Coefficienten durchaus nichts Unmögliches mehr enthalten.

Insofern gilt also das bekannte Theorem: eine Form, welche reelle Coefficienten hat, lässt sich in lauter reelle Factoren, entweder vom ersten, oder vom zweyten Grade, (binomische oder trinomische Factoren) oder in Factoren von beyderley Arten zerfällen.

Diese Sätze als richtig vorausgesetzt, lassen sich zwar noch keine allgemeine Regeln über die Auflösung der Gleichungen, aber wohl sehr viele interessante Beziehungen zwischen den Wurzeln derselben, und andern, damit zusammenhängenden, Größen ableiten. Sätze, deren vollständige Ableitung indessen noch mehr Kenntnisse der allgemeinen Arithmetik erfodert, als im Vorhergehenden enthalten sind. Es mag also an dieser Stelle genug seyn, die einfachste unter den Näherungsmethoden, wodurch man reelle Wurzeln einer gegebenen Gleichung mit beliebiger Genauigkeit entdecken kann, näher auseinander zu setzen.

Angenommen, daß die Form der Gleichung bestimmte Zahlen zu Coefficienten habe, so beruht die Art, wie man durch anzustellende Versuche Grenzen

finden kann, zwischen denen Wurzeln von ihr enthalten seyn müssen, auf folgender Betrachtung. Hätte die Gleichung lauter unmögliche Wurzeln, so mögte man für die unbekannte Größe jede beliebige Zahl, positiv oder negativ, ganz oder gebrochen, substituiren, und es würde allemal ein positives Resultat zum Vorschein kommen. Denn die unmöglichen Wurzeln, jedesmal die beyden paarweise zusammengenommen, welche nothwendig zugleich vorhanden seyn müssen, bringen in die Form der Gleichung Factoren des zweyten Grades von der schon vorhin dargestellten Form $(x^2 - 2ax + a^2 + b)$, welche kürzer als Quadrat einer Differenz, nebst einem angehenkten positiven Theile $((x - a)^2 + b)$ dargestellt werden kann. Aber diese Form gibt offenbar, man mag für die unbekannte Größe in ihr setzen was man will, allemal ein positives Resultat, denn jedes Quadrat, sey seine Wurzel was sie wolle, ist immer positiv. Kommt es also nur darauf an, zu bestimmen, welches Zeichen der Totalwerth einer Form annehmen werde, wenn man für die Hauptgröße derselben beliebige Zahlen substituirt, so braucht man auf die unmöglichen Factoren dieser Form keine Rücksicht zu nehmen, und kann sie als gar nicht vorhanden ansehn, weil Factoren, die zusammen immer ein positives Resultat geben, auf das Zeichen des ganzen Products keinen Einfluß haben können. Diejenigen Factoren einer solchen Form hingegen, welche aus möglichen Werthen der unbekannten Größe entspringen, können allerdings das Zeichen des ganzen Products bald so, bald anders

ausfallen machen, je nachdem der Werth beschaffen ist, welchen man für die unbekannte Größe an die Stelle setzt. Es sey $x = a$ eine Wurzel der Gleichung, also $x - a$ ein Factor ihrer Form. So lange man für x Etwas setzt, das mehr beträgt, als a, wird dieser Factor einen bestimmten positiven Werth haben; wenn man hingegen für x Etwas annimt das kleiner ist als a, so wird $x - a$ negativ werden müssen. Und so kann das eine Mal das Product sehr wohl das umgekehrte Zeichen von demjenigen erhalten, welches eben dasselbe das andre Mal bekommt. Allgemein darf man behaupten: zwey verschiedene Werthe der unbekannten Größe, die eine ungerade Menge von Wurzeln einer Gleichung zwischen sich fassen, so daß der eine mehr beträgt, als alle diese Wurzeln, der andre hingegen weniger als sie alle, geben, in die Form der Gleichung substituirt, und den Betrag derselben gehörig zusammengerechnet, allemal Resultate von verschiedenen Zeichen.

Es mögen, der Größe nach geordnet, ... a, b, c, d, f u. s. w. Wurzeln einer Gleichung vorstellen. Alsdann wird das Product ..$(x - a)(x - b).(x - c).(x - d)$ $(x - f)$... die Form der Gleichung geben. Man setze für x einen bestimmten Werth, welcher zwischen zwey von den Wurzeln der Gleichung z. E. zwischen a und b fällt, das heißt, welcher kleiner ist als a, und größer als b. Alsdann wird $(x - a)$ und alle vorhergehende Factoren in der Form der Gleichung, weil in ihnen vom Kleineren das Größere abgezogen wird, negativ werden müssen, $(x - b)$ hingegen, und

alle folgenden Factoren, weil bey ihnen das Umgekehrte Statt findet, sämtlich positiv. Man setze nachher für x einen zweyten Werth an die Stelle, der eine ungerade Menge von Wurzeln der Gleichung mehr als der erstere vor sich liegen hat, von denen er an Größe übertroffen wird, z. E. einen Werth, der zwischen d und f liegt. Alsdann wird jeder von den Factoren, welche vorhin positiv wurden, weil man damals für x Etwas setzte, das größer war als ihre zweyten Theile, (x — b), (x — c), (x — d), nun, da man für x Etwas substituirt, das kleiner seyn soll, als ihre zweyten Theile, das — Zeichen annehmen, während alle folgenden Factoren (x — f)... weil in ihnen, wie anfangs, für x Etwas größeres als ihre zweyten Theile substituirt wird, das vorige Zeichen behalten. Es wird also, in dem angenommenen Producte, bey der zweyten Substitution, eine ungerade Menge von Factoren mehr als bey der ersten negativ, während alle übrigen ihr Zeichen ungeändert beybehalten. Aber eine ungerade Menge negativer Factoren gibt allemal ein negatives Product, und wenn eben diese Factoren vorher sämtlich positiv waren, die übrigen aber in beyden Fällen durchaus die nemlichen Zeichen behalten, so muß das Product das eine Mal nothwendig ein andres Zeichen bekommen, als das andre Mal. Aus eben dem Grunde erhellet, daß zwey Werthe von x, zwischen denen eine gerade Menge von Wurzeln der Gleichung enthalten ist, da eine gerade Menge negativer Factoren eben so gut ein positives Product geben, als wenn

sie sämtlich positiv geblieben wären, Resultate von dem nemlichen Zeichen geben müssen, wenn sie in die Form einer Gleichung substituirt werden.

Man darf also, unter der anfänglichen Voraussetzung, folgenden Satz mit Gewißheit behaupten: Wenn zwey Werthe der unbekannten Größe, jeder für sich in die Form einer Gleichung substituirt, bey der Berechnung des aus allen ihren Gliedern entspringenden Betrages, Resultate von verschiedenen Zeichen darbieten, so liegt zwischen diesen bestimmten Werthen wenigstens eine; vielleicht auch mehrere, aber gewiß jedesmal eine ungerade Menge von den Wurzeln der Gleichung. Wenn aber zwey Zahlen, für die unbekannte Größe an die Stelle gesetzt, beydemale Resultate von gleichen Zeichen hervorbringen, so liegt zwischen ihnen entweder gar keine Wurzel der Gleichung, oder eine gerade Menge von solchen.

Will man also, um den Wurzeln einer gegebenen Gleichung durch Versuche beyzukommen, für die unbekannte Größe beliebige Zahlen an die Stelle setzen, so wird eine solche Probe, wenn schon die Glieder der Gleichung nicht zusammen o ausmachen, also das Substituirte keine Wurzel der Gleichung ist, doch nicht immer vergeblich angestellt seyn. Man wird das Zeichen, welches das Resultat der Substitution bekommt, bemerken; gäbe eine andrer Werth der unbekannten Größe dem Resultate seiner Substitution ein andres Zeichen, so läge zwischen diesen beyden Werthen zuverlässig wenigstens eine Wurzel der Gleichung, die

man auf diese Weise wenigstens in Grenzen eingeschlossen haben würde. Freylich bleibt das Verfahren auf diese Art noch sehr unvollkommen; die unmöglichen Ausdrücke, welche in vielen Fällen den Foderungen der Gleichung Genüge leisten werden, entdeckt man vermöge seiner gar nicht; selbst die möglichen Wurzeln der Gleichung, wenn man nicht die Menge der anzustellenden Proben ins Unendliche anhäufen will, können dabey zum Theil verborgen bleiben, indessen hat es doch schon dadurch großen Werth, daß es einzelne, und gewöhnlich wohl die meisten von den Wurzeln der Gleichung zu erforschen, und mit beliebiger Genauigkeit zu bestimmen erlaubt. Insofern mag hier der bequemste Mechanismus desselben etwas ausführlicher dargestellt werden.

Man suche anfangs, ob nicht Wurzeln einer gegebenen Gleichung zwischen benachbarten ganzen Zahlen eingeschlossen sind. Dies geschieht, indem man für die unbekannte Größe successiv alle ganze Zahlen, o selbst mit eingeschlossen, an die Stelle setzt, und den Werth, welchen die Form der Gleichung dafür annimt, berechnet. Man muß sich aber nicht bloß auf positive ganze Zahlen beschränken, sondern eben so gut bey diesen Substitutionen die negativen gebrauchen. Wo sich alsdann in unmittelbar auf einander folgenden Resultaten verschiedene Zeichen vorfinden, da liegt gewiß zwischen den beyden benachbarten ganzen Zahlen, deren Substitution diese Resultate gegeben hat, eine Wurzel der Gleichung. Dieses Verfahren ist, wenn man dabey Sätze

zu Hülfe rufen will, die erst in der Folge erörtert werden können, noch großer Abkürzung fähig, besonders um bestimmt wissen zu können, wie weit man bey den successiven Substitutionen fortzugehn braucht, und von welchem Puncte an man keine fernere Proben mehr zu machen nöthig hat, weil man sicher seyn kann, daß sich bey den folgenden Substitutionen keine Zeichenabwechslungen in den Resultaten mehr ereignen werden x).

---

x) Wenn man in die Form einer Gleichung für die unbekannte Größe successiv 0, 1, 2, 3, u. s. w. an die Stelle setzt, so bilden die successiven Resultate selbst eine Reihe von Zahlen, die einem bestimmten Gesetze unterworfen sind. Bey einer, auf solche Art entsprungenen Reihe findet aber allemal nachfolgende (später einer ausführlichen Betrachtung zu unterziehende) Eigenschaft statt. Die Differenzen ihrer benachbarten Glieder bilden selbst wieder eine Reihe (erste Differenzreihe); eben so aufs Neue die Differenzen benachbarter Glieder in dieser (zweyte Differenzreihe), und so fort. Aber man kommt dabey endlich auf eine Differenzreihe, worin alle Glieder durchaus dieselben sind, woraus sich also keine fernere mehr bilden lassen. Ihre Zahl, ausdrückend, die wievielste der allmälig aus einander abgeleiteten Differenzreihen sie ist, stimmt immer mit dem Grade der Form, woraus die Hauptreihe entsprang, völlig zusammen; jedes Glied in ihr ist ein Product aller ganzen Zahlen von 1 an, bis zu jenem Grade hinauf. Es sey z. E. die Form $x^3 - 8x + 4$; es werde

für $x = $	0, 1, 2, 3, 4, 5, ..
ihr Werth	4, −3, −4, 7, 36, 89
So ist I DiffR.	−7, −1, 11, 29, 53
II DiffR.	6, 12, 18, 24
III DiffR.	6, 6, 6

Hat man auf diesem Wege erst eine Wurzel zwischen zwey benachbarte ganze Zahlen eingeschränkt, so

---

Man kann bey der Bildung dieser Reihen aber auch den umgekehrten Weg nehmen, von der lezten Differenzreihe allmälig zu den vorhergehenden, und so endlich zur Hauptreihe aufsteigend. Addirt man ein folgendes Glied einer Differenzreihe zu dem eben so hohen der vor ihr unmittelbar vorhergehenden Reihe, so erhält man für diese ein neues, nächsthöheres Glied. Für die allerlezte Differenzreihe kennt man aber alle folgende Glieder zum Voraus; man kann also auch alle folgende Glieder der nächsthöheren Reihe durch successives Addiren finden. Aus dieser aber kann man wieder eben so die Fortsetzung derjenigen geben, wovon sie selbst Differenzreihe war, und auf diese Art fortschreiten, bis man zur Hauptreihe gelangt ist. In unserm Beyspiele gäbe die Fortsetzung der zweyten Differenzreihe, die sich mit 24 schloß,

II) 24) 30, 36, 42, 48, . . .

Daraus fände sich die Fortsetzung der ersten, die mit 53 aufhörte

I) 53) 83, 119, 161, 209 . . .

Daraus endlich die Fortsetzung der Hauptreihe, die mit 89 endigte

89) 172, 291, 452, 661 . .

welches die Werthe der anfänglichen Form für $x = 6, 7, 8, 9 \ldots$ seyn werden.

Bey diesem Verfahren sieht man augenblicklich, ob bey weiterer Fortsetzung der Hauptreihe noch Zeichen-Abwechslungen möglich sind. Wenigstens sobald die lezten Glieder aller vorhandenen Reihen positiv sind, kann es deren ferner nicht mehr geben.

Aber nicht bloß vorwärts, sondern auch rückwärts läßt sich die Hauptreihe auf eine ähnliche

ist es leicht, die Näherung zu ihrem wahren Werthe beliebig weiter zu treiben. Dabey ist der Gebrauch

---

Weise fortsetzen, so daß man den Betrag der Form für $x = -1, -2, -3$, u. s. w. angeben kann. Ein vorhergehendes Glied einer Differenzreihe, von dem an Zahl nächsthöheren der unmittelbar vorhergehenden Reihe abgezogen, giebt ein neues, nächstniedriges Glied in dieser Reihe. Man kennt aber alle Glieder der lezten Differenzreihe, man kann also durch successives Abziehn alle früheren Glieder der vorhergehenden Reihe finden, und so aus einer Reihe zur andern allmälig aufsteigend, endlich zu den früheren Gliedern der Hauptreihe gelangen. In dem vorigen Beyspiele fing sich die IIte Differenzreihe mit 6 an; ihre früheren Glieder sind also, rückwärts angegeben

$$\ldots -18, -12, -6, 0, (6 \text{ II}$$

Die Iste Differenzreihe fing mit -7 an, ihre früheren Glieder sind also:

$$+29, +11 -1, -7, -7) \text{ I}$$

Die Hauptreihe fing mit 4 an, ihre früheren Glieder sind also: $\quad -28, 1, 12, 11, 4)$

Diese Zahlen stellen die Werthe der anfänglichen Form für $x = -1, -2, -3, -4, \ldots$ dar. Auch dabey kann man bald wahrnehmen, wann eine Fortsetzung des Verfahrens anfängt überflüssig zu werden. So bald die Anfangsglieder der successiven Reihen, nach der Ordnung von dem der untersten an, die von selbst lauter positive Glieder hat, regelmäßig abwechselnde Zeichen haben, ist die Arbeit als geschlossen anzusehn. Denn alsdann vermag die successive Subtraction, die man an ihnen auszuüben hat, um zu neuen, nächstvorhergehenden Anfangsgliedern zu gelangen, nichts weiter als beständige

der Decimalbrüche [der zweckmäßigste, und man hat bey Fortsetzung der Untersuchung allmälig unter allen vom Nenner Zehn, hernach vom Nenner Hundert, und so fort, diejenigen beyden benachbarten, das heisst im Zähler um eine Einheit verschiedenen, aufzufinden, welche die gesuchte Wurzel zwischen sich fassen. Die Methode des Verfahrens könnte dabey immer die nemliche bleiben; ein successives Substituiren zweyer, um eine Einheit, die anfangs vom Range der Zehntheile, nachher vom Range der Hunderttheile und so weiter genommen werden müßte, verschiedener Zahlen, bis man zwey Resultate erhielte, die verschiedene Zeichen führten. Hat man die Wurzel schon in ganzen Zahlen gefunden, so können der Proben, die in Absicht auf die an sie zu henken-

---

Vergrößerung dessen, was vorhin in jeder Reihe Anfangsglied war, ohne Aenderung seines Zeichens. Vom Positiven etwas Negatives abziehn, heisst das Positive vergrößern; vom Negativen etwas Positives subtrahiren, das Negative größer machen.

Für die in unserm Beyspiele angenommene Form würde auch der Zweck der ganzen Arbeit erreicht seyn. $x = 2$ gab zum Resultat -4; $x = 3$ hingegen $+7$; zwischen 2 und 3 liegt folglich eine Wurzel der Gleichung. $x = 0$ gab $+4$, $x = 1$ aber -3; zwischen 0 und 1 liegt also eine zweyte Wurzel. $x = -3$ endlich brachte $+1$; $x = -4$ hingegen -28; zwischen -3 und -4 ist folglich die dritte Wurzel der Gleichung enthalten.

Den bequemsten Mechanismus im Schreiben bey der Ausübung dieser Methode wird Jeder von selbst finden. Ein Beyspiel davon wird im Folgenden vorkommen.

den Zehntheile überall möglich sind, höchstens neun seyn; eben so viele, wenn man die Grenzen schon auf Zehntheile zusammengezogen hat, und nun, noch enger, auf Hunderttheile beschränken will, und so fort. Indessen kann in den meisten Fällen ein kürzeres Verfahren angewandt werden. In Absicht auf die Zehntheile muß es allerdings bey der eben angedeuteten Methode sein Bewenden haben. Sind a und a + 1 zwey benachbarte Zahlen, von denen die eine a, für x in die Form der Gleichung substituirt, ein Resultat von anderm Zeichen gibt, als a + 1, so setze man allmälig für x an die Stelle a, 1; a, 2 u. s. w., bis höchstens a, 9, um zu sehn, welcher von diesen Werthen zuerst im Resultate ein andres Zeichen hervorbringt, als der nächstvorhergehende gegeben hat. Zwischen ihm und diesem nächstvorhergehenden liegt alsdann die gesuchte Wurzel der Gleichung, deren Bestimmung auf diese Art schon bis zu den Zehntheilen gediehen seyn wird.

Was aber die höheren Decimalstellen betrifft, so kann ihre allmälige Auffindung sehr oft durch Hülfe des nachfolgenden Satzes abgekürzt werden. Gesetzt man habe einen Decimalbruch, dessen höchste Ziffer einen gewissen Rang (n) besitzen mag, in welchem übrigens noch unbestimmt viele Ziffern von successiv niedrigern Rängen enthalten seyn mögen. Dieser Decimalbruch sey als Summe aller Glieder von einer Form gegeben, die regelmäßig nach Potenzen einer gewissen unbekannten Größe, von der ersten Potenz an zu den successiv höheren hinauf, fortschreiten, und für den An-

fang, der Einfachheit wegen, in jedem Gliede die Einheit zum Coefficienten haben mag ($b = p + p^2 + p^3 + \ldots$) Alsdann ist offenbar jene unbekannte Größe gleichfalls ein Bruch, dessen höchste Ziffer wenigstens keinen höheren Rang besitzen kann, als der gegebene Bruch auf der andern Seite des Gleichheitszeichens. Alsdann aber läßt sich der Rang, zu welchem höhere Potenzen von ihr aufsteigen können, sehr leicht im Allgemeinen bezeichnen. Eine Einheit vom nächsthöheren Range (hier also eine Einheit, die zum Nenner die nächstniedrige Potenz von Zehn hat, $\frac{1}{10^{n-1}}$) beträgt mehr, als jene unbekannte Größe; deren successive Potenzen geben also gleichfalls mehr als die ihrigen, und können insofern gebraucht werden, um die Grenzen zu bezeichnen, bis zu welchen jene nicht aufzusteigen im Stande sind. So kann namentlich das Quadrat der unbekannten Größe (p^2) noch nicht bis zu einem Decimalbruche aufsteigen, dessen Nenner 10^{2n-2} wäre, weil der kleinste Bruch, der diesen Nenner führen kann $\left(\frac{1}{10^{2n-2}}\right)$ schon das Quadrat von einem solchen $\left(\frac{1}{10^{n-1}}\right)$ ist, der mehr betragen soll, als das der unbekannten Größe. Eben so wenig kann die dritte Potenz (p^3) zu einem Bruche aufsteigen, dessen Nenner 10^{3n-3} wäre, und so weiter. Alles also, was in dem bekannten Bruche ($b = p + p^2 + p^3 \ldots$), der aus der Summe jener Potenzen erwachsen seyn soll, vom n^{ten} Range des Nenners bis zum $2n-2^{ten}$, den lezteren Rang mit einge-

schlossen, von Ziffern vorhanden ist, kann lediglich aus dem ersten Gliede der die Summe bewürkenden Reihe, d. h. aus p selbst herrühren; erst auf die späteren Ziffern des Bruchs können die folgenden Glieder der Reihe in demjenigen, was sie zu der ganzen Summe beytragen, Einfluß zeigen. Indem man also aus dem bekannten Bruche (b) die Ziffern heraushebt, welche sich von der n^{ten} Decimalstelle bis zur $2n - 2^{ten}$, inclusive, erstrecken, hat man den Werth der unbekannten Größe (p) bis auf eben soviele Decimalstellen richtig bestimmt. Allenfalls kann die Ziffer der lezten Decimalstelle doch noch um eine Einheit zu groß seyn, wenn etwa aus p^2, obschon es nur bis zur $2n - 1^{ten}$ Decimalstelle aufsteigen kann, doch bey der Addition zu p, wegen des Uebertragens aus einer Stelle in die nächsthöhere, welches bey der Addition decadisch gebildeter Zahlen so häufig vorkommt, recht wohl eine Einheit in die nächsthöhere Stelle übergegangen seyn kann, zu welcher p^2 für sich allein nicht hinaufgereicht haben würde.

Sollten aber in der Reihe, wo die Summe der nach Potenzen einer unbekannten Größe fortschreitenden Glieder einen gegebenen Bruch ausmacht, die folgenden Glieder (denn das erste kann man allemal durch Division von seinem Coefficienten befreyen) noch bestimmte Zahlen zu Coefficienten haben, so würde sich allerdings in den obigen Schlüssen Vieles ändern müssen ($b = p + Ap^2 + B . p^3 + \ldots$) Namentlich kommt alsdann Vieles auf den Coefficienten des zweyten Gliedes (Bp^2) an. Ist er für sich ein ächter

Bruch, so wird dadurch das zweyte Glied noch mehr erniedrigt, als bey der anfänglichen Voraussetzung, kann also zu der Summe erst in noch späteren Decimalstellen beygetragen haben. Sollte hingegen dieser Coefficient eine ganze Zahl seyn, so erhöht er, mehr oder weniger, je nachdem er selbst größer oder kleiner ist, den Werth des Gliedes, und läßt dasselbe zu höheren Decimalstellen aufsteigen, als es sonst würde darzubieten im Stande gewesen seyn. Etwas ähnliches gilt auch von den folgenden Gliedern, indessen müßten ihre Coefficienten verhältnißmäßig noch sehr viel beträchtlicher seyn, da sie sonst höhere Potenzen der unbekannten Größe, die als Potenzen eines ächten Bruchs allmälig immer weniger betragen, enthalten, wenn ihr Einfluß bey den höchsten Ziffern der ganzen Summe schon anheben sollte. Ueberhaupt wird dabey jedes Mal Alles auf die individuelle Beschaffenheit der einzelnen Coefficienten ankommen.

Der Gebrauch dieses Satzes bey der nähernden Berechnung einer Wurzel der Gleichung muß folgendermaßen gemacht werden. Vorausgesetzt, daß die Wurzel schon bis auf Ganze und Zehntheile genau gefunden ist, (der Inbegriff davon mag durch a angedeutet werden); und nur noch die Hunderttheile und folgenden Decimalen fehlen, deute man diesen lezten Theil der unbekannten Größe durch ein neues Zeichen (etwa p) an, so daß die unbekannte Größe der Gleichung als aus einem bekannten, und einem unbekanten Theile bestehend gesetzt wird ($x = a + p$). Man substituire

diesen Werth für sie in die Gleichung, so wird eine Form entstehn, die regelmäßig nach Potenzen einer neuen unbekannten Größe (p) fortschreitet, von welcher man aber schon zum Voraus weiß, daß sie ein Bruch seyn werde, welcher aufs Höchste zu den Hunderttheilen aufsteigen kann.

Man ordne die neue Form so, daß das bekannte Glied in ihr auf der einen Seite des Gleichheits-Zeichens allein stehe, alle unbekannten Glieder von Unten an auf der andern Seite, und befreye durch Division das erste unbekannte Glied von seinem Coefficienten. Dadurch wird eine Form entspringen, wie sie unmittelbar vorhin betrachtet worden ist ($b = p + Ap^2 + Bp^3 \ldots$). Hindern es nur die Coefficienten der folgenden Glieder nicht, so wird man aus dem bekannten Bruche auf der einen Seite der Gleichung (b), sogleich die Hunderttheile welche er enthält hervorheben, und als diejenigen, welche die unbekannte Größe (p) in sich schließt, ansetzen dürfen. Denn wenn p nur bis zum n^{ten} Range (hier $n = 2$) aufstieg, so kann p^2 noch nicht bis zum Range $2n - 2$ (hier $4 - 2 = 2$) sich erstrecken, was also in der Summe vom Range 2 vorhanden ist, gehört lediglich p an.

Hat man auch die Hundertheile der gesuchten Wurzel auf diese Art gefunden, so kann man für die Tausendtheile und folgenden Decimalstellen eben das Verfahren aufs Neue beobachten. Es bedeute jezt, unbestimmt, a den Inbegriff aller vorhergehenden Ziffern; die man für die Wurzel der Gleichung schon ge-

funden hat, p den Bruch, der noch an sie gehenkt werden müsste, wenn die Bestimmung auf weitere Decimalstellen getrieben werden sollte, und es sey die höchste Decimalstelle, welche p enthalten kann, die n^{te}. Alsdann substituire man in der anfänglichen Gleichung für $x = a + p$, und ordne die herauskommende Form so, wie es vorhin bey dem einfachsten Falle vorgeschrieben wurde ($b = p + Ap^2 + Bp^3 \ldots.$) Hindern alsdann die Coefficienten nicht, so wird man aus dem Bruche, welcher die Summe aller unbekannten Glieder darstellt, sogleich alle Decimalstellen von der n^{ten} bis $2n - 2^{ten}$ hervorheben, und als diejenigen, welche der unbekannte Bruch p in sich schließen muß, ansetzen dürfen. Ist also $n = 3$, wie der Fall seyn wird, wenn die unbekannte Größe schon bis auf Hunderttheile bestimmt ist, so gelangt man auf diesem Wege (weil $2n - 2$ nun $= 4$) bis zur vierten Decimalstelle. Ist, bey der nächsten Wiederholung der Operation $n = 5$, so kommt man (da alsdann $2n - 2 = 8$) bis zur achten; wollte man noch einen Schritt weiter fortthun, wobey $n = 9$ seyn würde, so gelangte man (indem $2n - 2$ jezt $= 16$ wäre) bis zur sechszehnten Decimalstelle. Und so würde überhaupt, je weiter man fortschritte, um desto größer die Menge der neuen Decimalstellen werden, welche sich bey den folgenden Operationen finden müsste.

Diese Methode hat freylich die Unbequemlichkeit, daß sie nicht im Allgemeinen ganz mechanisch und geradezu angewendet werden kann, sondern jedesmal ein

vorläufiges Urtheil, gegründet auf die Beschaffenheit der Coefficienten in der durch Substitution veränderten Form der Gleichung, erfodert. Ja sie wird bey manchen Gleichungen, wenigstens in Beziehung auf die ersten Decimalstellen einer gesuchten Wurzel gar nicht anwendbar seyn. Die Kunstgriffe, deren man sich zur Erleichterung der fortgesetzten Substitutionen bedienen kann, finden sich leicht bey würklich angestellter Rechnung, und es verlohnt sich nicht der Mühe, hier dabey zu verweilen *y*).

---

y) Es sey die Gleichung $x^4 - 5x^3 - 50x^2 + 130x + 600 = 0$ gegeben.

Man suche zuerst, ob sie nicht reelle Wurzeln hat, die zwischen benachbarte ganze Zahlen fallen. Man braucht zu dieser Absicht nur die Werthe von 0 bis 3 unmittelbar zu substituiren; das Uebrige geben die Differenzreihen

−6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

396 −50 −144 −24 196 426 |600 676 636 486| 256 0 −294 −254 −24 636

−446 −94 120 220 230 174 |76 −40 −150| −230 −256 −204 −50 230 660

352 214 100 10 −56 −98 |−116 −110| −80 −26 52 154 280 430

−138 −114 −90 −66 −42 −18 | 6 | 30 54 78 102 126 150

24 24 24 24 24 24 | 24 | 24 24 24 24 24

Die Gleichung hat also eine ganze Zahl +5 zur Wurzel; die übrigen liegen, die eine zwischen 8 und 9, die andre zwischen −2 und −3; die lezte endlich zwischen −5 und −6.

Um den übrigen Wurzeln genauer nachzuforschen, wird es sehr gerathen seyn, vermöge der einen, genau gefundenen, indem man eine Form des ersten Grades aus ihr bildet $(x - 5)$, und damit die Form der Gleichung dividirt, den Grad derselben um eine Einheit zu erniedrigen. So kommt, nach angestellter Division die Gleichung $x^3 - 50x - 120 = 0$,

Oft kann es zu manchen Absichten nüzlich seyn, für die unbekannte Größe einer Gleichung eine neue einzu-

---

deren drey Wurzeln zwischen 8 und 9 die erste; zwischen —2 und —3 die zweyte, zwischen —5 und —6 die dritte enthalten sind.

Sucht man in dieser Gleichung die Wurzel weiter nach, welche zwischen 8 und 9 liegen muß, so findet sich dieselbe in Zehntheilen sogleich, denn $x = 8{,}0$ gibt zum Resultat -8, hingegen $x = 8{,}1$ gibt $+6{,}441$; sie ist also in Zehntheilen $x = 8{,}0$. Um sie in Hunderttheilen zu erhalten, setze man $x = 8{,}0 + p$. Dadurch verwandelt sich die Form der Gleichung in $0 = -8 + 142p + 24p^2 + p^3$. Diese, gehörig verwandelt bringt $\frac{8}{142} = p + \frac{24}{142}p^2 + \frac{p^3}{142}$. Hier kann also die berührte Methode sicher gebraucht werden; die Hunderttheile des Bruchs $\frac{8}{142} = 0{,}05 \ldots$ sind unfehlbar die in p enthaltenen. Man setze also jezt ferner $x = 8{,}05 + p$. Alsdann erhält man $0 = -0{,}839875 + 144{,}4075p + 24{,}15p^2 + p^3$, also, gehörig umgesetzt, $\frac{0{,}839875}{144{,}4075} = p + \frac{24{,}15p^2 + p^3}{144{,}4075}$. Hier dürfen unfehlbar wieder die beyden ersten Decimalen des bekannten Bruchs $\frac{0{,}839875}{144{,}4075} = 0{,}0058$ als p angehörig genommen werden. Man hat also jezt $x = 8{,}0558 + p$. Die Substitution dieses Werths gibt:
$0 = -0{,}001498898888 + 144{,}69774092p + 24{,}1674p^2 + p^3$. Wiederum transponirt,
$\frac{0{,}0014988 \ldots}{144{,}697 \ldots} = p + \frac{24{,}674p^2 + p^3}{144{,}697 \ldots}$
Es sind hier unfehlbar die vier ersten Decimalstellen des bekannten Bruchs, $= 0{,}00001035$, welche

führen, die mit der vorigen in bekanntem Zusammenhange steht. Dies erfodert nichts weiter als ein einfaches Substituiren. Man drücke die anfängliche unbekannte Größe bestimmt durch die neue aus, welches vermöge des angenommenen Zusammenhangs zwischen beyden allemal möglich ist, und setze diesen Werth in der gegebenen Gleichung an die Stelle der alten unbekannten Größe. Sie wird dadurch herausgehn, und es wird die neue dafür wieder erscheinen. So kann man nach dem gewöhnlichen Ausdrucke, die vier Species an den Wurzeln einer Gleichung ausüben, auch ohne sie zu kennen. Will man statt einer Gleichung eine andre haben, deren Wurzeln um eine bestimmte Zahl (a) größer oder kleiner als die der vorigen sind, so setze man in der ersten statt x an die Stelle $y - a$, oder $y + a$; will man, daß die Wurzeln der neuen Gleichung Vielfache oder aliquote Theile von denen der anfänglichen seyn sollen, so setze man für x an die Stelle $\frac{y}{a}$ oder $y \cdot a$. Ein Fall, wo eine Verwandlung dieser Art von gutem Nutzen seyn kann, ist schon bey den cubischen Gleichungen vorgekommen, als in ihnen das erste Glied nach dem höchsten fortgeschafft wurde; das Allgemeinere in dieser Rücksicht beruht auf folgender Betrachtung. Wenn in der Form einer beliebigen Gleichung ($x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} \ldots$) für die

---

man als Werth von p nehmen darf, so daß also, genau genug zu den meisten Absichten, $x = 8{,}05581035$ gefunden ist.

unbekannte Größe (x) eine neue (y), die um eine bekannte, aber für den Augenblick noch unbestimmte Größe (A) kleiner seyn soll ($x = y + A$) an die Stelle gesetzt wird, so entsteht bey dieser, durch den binomischen Lehrsatz leicht zu vollführenden, Substitution, eine Form, die nach Potenzen der neuen unbekannten Größe fortschreitet, deren Coefficienten zusammengesetzte Größen sind, zu deren Bildung theils die Coefficienten der anfänglichen Form, theils auch die unbestimmte Größe (A), welche den zweyten Theil des für x gesetzten Werths ausmacht, vereinigt beytragen.

Die Resultate der Substitution sind, so wie sie aus den einzelnen Gliedern der anfänglichen Form entstehn, Reihen, die nach Potenzen der neuen unbekannten Größe fortschreiten, und sich insofern zu einer Totalreihe vereinigen lassen. Aber diese Reihen können sich nicht so verbinden, daß Glieder gleicher Zahl sich zu einem Hauptgliede der Summe vereinigten. Jedes folgende, so wie es eine niedrigere Potenz von x enthält, fängt auch mit einer niedrigeren Potenz von y an. Allgemein, wenn man angeben soll, wie sich ein gewisses Glied der nach Potenzen von y fortschreitenden Totalreihe bildet, wird man behaupten dürfen, daß alle Glieder der anfänglichen, nach Potenzen von x fortschreitenden Form, deren Zahl nicht geringer ist als die des verlangten, dazu beytragen. Es sey das gesuchte Glied das r^{te} nach dem anfänglichen, enthalte also y^{n-r}. Jedes Glied der gegebenen, nach Potenzen von x fortlaufenden Form, von x^n bis auf das

r^{te} nach ihm, welches x^{n-r} in sich schließt, enthalten, wenn man in ihnen für x an die Stelle setzt $y + A$, einen Theil, der jene Potenz von y mit sich bringt. Offenbar aber erscheint dieser Theil bey den einzelnen Entwicklungen desto früher, je niedriger die Potenz von x ist, woraus er gezogen werden soll. Bey $x^n = (y + A)^n$ ist es das r^{te} Glied $= {}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}}A^r . y^{n-r}$; bey $a . x^{n-1} = a . (y + A)^{n-1}$ ist es das $(r - 1)^{te} = {}^{n-1}\overset{r-1}{\mathfrak{B}} . aA^{r-1}y^{n-r}$, und so fort bey jeder niedrigeren Potenz von x, in welche man substituirt, ein an Zahl immer um eine Einheit niedriger werdendes Glied, welches man herausheben muß, wenn man dieselbe Potenz von y behalten will. Es würde also die ganze Substitution unter folgendem Schema erscheinen:

$$x^n = y^n + . {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}A . y^{n-1} + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}A^2y^{n-2} \ldots + {}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}}A^ry^{n-r} ..$$
$$+ ax^{n-1} = ay^{n-1} + {}^{n-1}\overset{1}{\mathfrak{B}}Aay^{n-2} .. + {}^{n-1}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}A^{r-1}a . y^{n-r}$$
$$+ bx^{n-2} = \qquad by^{n-2} .. + {}^{n-2}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}A^{r-2}by^{n-r}$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$+ px^{n-r} = \qquad - \qquad - \qquad . py^{n-r}$$
$$\vdots$$

Die Coefficienten der neuen, nach Potenzen von y fortschreitenden Form enthalten also offenbar, ausser denen der anfänglichen, die bekannte Größe (A), welche als zweyter Theil des Werths von x angenommen ist. Sie stellen, wenn man will, Formen dar, die nach Potenzen dieser Größe fortschreiten, und der Grad dieser Formen, wird mit der Zahl des Gliedes, deren Coefficienten sie bilden sollen, identisch seyn (das r^{te}

Glied der neuen Form, y^{n-r} enthaltend, hat zum Coefficienten eine nach Potenzen von A fortschreitende Form, die mit A^r anhebt, also vom r^{ten} Grade ist.

Man kann, diesem Gesetze zu Folge, jene bekannte, aber hier noch unbestimmte Größe (A), so einzurichten verlangen, daß dadurch irgend einer von den Coefficienten der nach Potenzen von y fortschreitenden Form einen vorgeschriebenen Werth erhalten muß. Durch eine solche Foderung wird, indem man den Ausdruck dieses Coefficienten jenem Werthe würklich gleich setzt, eine Gleichung entstehn, in welcher A die unbekannte Größe ist, und von deren Auflösung die würkliche Realisirung jener Foderung abhängen wird. Brauchbar also lässt sich die ganze Betrachtung nur für den ersten und zweyten Coefficienten der neuen Form machen, weil, indem man sie einer gegebenen Größe gleich setzt, nur Gleichungen des ersten und zweyten Grades entstehn, während bey allen folgenden Gleichungen höherer Grade zum Vorschein kommen müssen. Am häufigsten kommt der leichteste Fall vor. Die neue Gleichung soll das erste Glied nach dem höchsten, welches sie bey gänzlicher Vollständigkeit ihrer Form enthalten müsste; nicht in sich schließen. Man setze also den Coefficienten dieses Gliedes, welcher die noch nicht bestimmte Größe A in sich fasst, $^{n}\overset{1}{B}A + a$, das heisst: $nA + a = 0$. Dies gibt, A als unbekannte Größe angesehn, $A = \frac{-a}{n}$. Und so entspringt die Regel. Wenn man aus der Form einer Gleichung ($x^n + ax^{n-1} +$

$bx^{n-2} \ldots = 0$), durch Einführung einer neuen unbekannten Größe, eine andre Form erhalten will, in welcher das erste Glied nach dem höchsten nicht vorhanden ist (oder o zum Coefficienten hat, so setze man für $x = y - \frac{a}{n}$, d. h. man lasse die neue unbekannte Größe um eine Zahl größer seyn als die alte, welche herauskommt, wenn man den Coefficienten des ersten Gliedes in der gegebenen Gleichung durch den Grad derselben dividirt. Dieses Fortschaffen des erstes Gliedes gewährt bey vielen Rechnungen mit Gleichungen große Erleichterung.

Die höheren Untersuchungen über die Gleichungen und ihre Wurzeln zerfallen in zwey, dem Zwecke und der Methode nach sehr verschiedene Theile. In dem einen bemüht man sich die Wurzeln selbst zu finden; Kennzeichen ob sie möglich oder unmöglich sind, und wie viele von jeder Art ein Gleichung enthalten mag, anzugeben; Grenzen zu finden, zwischen denen diese Wurzeln enthalten seyn müssen, und so weiter. Keine dieser Untersuchungen ist zu einem allgemeinen Resultate gediehn. Man hat dabey vielfältig geometrische Betrachtungen zu Hülfe gerufen; die Einmischung eines solchen, der Arithmetik fremden Princip mag allerdings zur Versinnlichung vieler allgemeinen Beziehungen beytragen, aber eine Erweiterung der theoretischen Arithmetik ist von ihr nicht zu erwarten. Indessen bleiben jene Untersuchungen dessen ungeachtet lehrreich und brauchbar; vielfältige specielle Resultate gehn aus ihnen her-

vor; bequemere Näherungsmethoden sind eine Frucht von ihnen. An diese Stelle aber gehören sie nicht, denn sie setzen eine vollständige Kenntniß von den allgemeinen Gesetzen der arithmetischen Entwicklungen voraus. Einiges von ihnen wird im Folgenden vorkommen.

Der zweyte Haupttheil von den Untersuchungen über die Gleichungen ist von der würklichen Auflösung unabhängig, und beschäfftigt sich lediglich mit demjenigen, was, mit den Wurzeln einer Gleichung zusammenhängend, und aus ihnen gebildet, berechnet werden kann, ohne diese Wurzeln selbst einzeln als bekannt vorauszusetzen. Die Coefficienten, welche die Form der Gleichung bey sich führt, sind gegebene Größen, und ihr Zusammenhang mit den unbekannten Wurzeln ist völlig bekannt. Verbindungen dieser Coefficienten unter einander, bringen also unfehlbar Größen hervor, die sich gleichfalls auf bestimmte Weise aus den Wurzeln der Gleichung erzeugen, und als Resultate bestimmter Rechnungen mit bekannten Größen gleichfalls bekannt sind. Man darf im Allgemeinen behaupten: Jeder noch zusammengesetzte arithmetische Ausdruck, wozu alle Wurzeln einer gegebenen Gleichung auf dieselbe Weise beytragen, läſſt sich bloß aus den Coefficienten, welche die Form der Gleichung bey sich führt, berechnen, ohne daß es im Geringsten nöthig wäre, die einzelnen Wurzeln selbst zu kennen. In dieser Allgemeinheit kann freylich der Satz an der gegenwärtigen Stelle nicht bewiesen werden; es mag aber, als Vorbild seiner Ableitung, als Fundament der ganzen höhe-

ren Algebra, in einem der folgenden Kapitel, bey Gelegenheit einer arithmetischen Untersuchung von ähnlicher Form, das Theorem aufgestellt und bewiesen werden, auf welchem alle jenen höheren Untersuchungen über die Gleichungen gegründet werden müssen.

Sechstes Kapitel.

Von der Multiplication zusammengesetzter Formen im Allgemeinen, und dem polynomischen Lehrsatz für ganze positive Exponenten.

Die allgemeine Aufgabe: mehrere verschiedene, oder nach Potenzen der nemlichen Hauptgröße fortlaufende Formen mit einander zu multipliciren, hat im Ganzen weniger Schwierigkeit, als particuläre Fälle; eben weil die Unbestimmtheit der Formen keine näheren Modificationen der allgemeinen Regeln gestattet. Der Gang des bey ihr anzuwendenden combinatorischen Verfahrens wird mehr oder weniger einfach seyn, je nachdem in den zusammengesetzten Factoren mehr oder weniger Uebereinstimmung in Absicht auf die gleichförmige Regelmäßigkeit ihres Baus stattfindet.

Will man von dem Einfachsten dieser Art ausgehn, so setze man mehrere Formen, die in ihrem ersten Gliede sämmtlich die erste Potenz der Haupt-

größe enthalten, und nur regelmäßig in ihre folgenden Glieder die successiv höheren aufnehmen, so daß also in jeder die Zahl eines beliebigen Gliedes mit dem Grade der darin von der Hauptgröße vorkommenden Potenz zusammenfällt. Alsdann tritt offenbar die Regel in unmittelbare Anwendung, welche im Anfange des dritten Kapitels zur analytischen Begründung des Variirens zu bestimmten Summen gegeben worden ist. Das gesuchte Product wird eine Form, die in ihrem ersten Gliede eine Potenz der Hauptgröße enthält, deren Exponent mit der Zahl der vorhandenen Factoren einerley ist; in ihren folgenden Gliedern allmälig durch die nächsthöheren Potenzen fortschreitet, so daß die Zahl des folgenden Gliedes, addirt zu der der vorhandenen Factoren, den Grad der in ihm enthaltenen Potenz angibt; die Coefficienten der Glieder sind Variationsformen zu der Summe, welche die Exponenten ihrer Potenzen darstellen, gebildet aus den Reihen von Elementen, welche die Coefficienten der sich multiplicirenden Formen in ihrer natürlichen Ordnung darbieten. In Zeichen: es mögen m Reihen vorhanden seyn, wovon $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 ..$ überhaupt den Bau vorstellt; das Product wird eine Form werden, deren Anfangsglied ${}^{m}\overset{m}{C}x^{m}$, in welcher überhaupt das r^{te} nachfolgende Glied ${}^{m+r}\overset{m}{C}x^{m+r}$ ist, die Variationsformen als Producte aus den Coefficienten der gegebenen Factoren als reellen Elementen, die dem gemeinschaftlichen Index zum Grunde liegen, gedacht, und

alle die, welche zu derselben Summe gehören, durch Addition mit einander vereinigt.

Alles kommt also, bey würklicher Ausführung einer solchen Arbeit, auf die Bildung jener Variationsformen zu vorgeschriebenen Summen an. Will man nur ein einzelnes Glied des Products, also nur eine Gruppe von Variationsformen, die einer individuellen Summe gehören soll, so läßt sich, ohne überflüssige Weitläuftigkeit, für die Entwicklung der einzelnen Formen kein andres Verfahren, als das coordinirende, Anfangs beschriebene, anwenden. Bey ihm ist es nothwendig, für die Reihen einen gemeinschaftlichen Index einzuführen, aus dessen Elementen die Formen zu bilden, und die durch ihr Nebeneinanderstehn angedeutete Multiplication der Größe, wovon sie Stellvertreter waren, würklich vorzunehmen, um zuletzt die gefundenen Producte in eine Summe zu bringen z). Sollen hingegen

z) Sollte z. E. für das Product der drey Reihen

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2x & -\,4x^2 & +\,5x^3 & -\,6x^4 \\ 3x & +\,x^2 & -\,2x^3 & +\,3x^4 \\ 5x & +\,3x^2 & -\,4x^3 & -\,2x^4 \end{array}$$

das fünfte Glied nach dem anfänglichen gefunden werden, so wäre dasselbe $^{3*5}\overset{3}{V} . x^{3*5}$ und man müßte, um seinen Coefficienten zu berechnen, aus dem Index 1, 2, 3, 4 alle Variationsformen der dritten Classe zur Summe 8 entwickeln, jede davon aus den Coefficienten realisiren, und die Producte vereinigen. Diese Formen sind, indepedent gesucht, folgende

mehrere Glieder des Products nach ihrer natürlichen Ordnung entwickelt werden, so gewährt das recurrirende Verfahren in der Ableitung der ihnen als Coefficienten gebührenden Inbegriffe von Variationsformen wesentliche Abkürzung. Es gibt mancherley combinatorische Recursionen zwischen Variationsformen, die zu niedrigeren Summen und niedrigeren Classen gehören; es ist aber nur eine einzige darunter für unsern arithmetischen Zweck brauchbar, das heißt: so beschaffen, daß sie uns nicht bloß behülflich wird, die Andeutung der Art, wie höhere Coefficienten berechnet werden müssen, abzuleiten aus den Andeutungen für die Berechnung niedriger Coefficienten, sondern in der That ein Mittel darbietet, aus schon gefundenen Werthen früherer Coefficienten die Werthe späterer abzuleiten. Diese Recursion lehrt uns

realisirt

134 — 2 . (— 2) (— 2)	=	+ 8	
143 — 2 . 3 . (— 4)	=		— 24
224 — (— 4) . 1 . (— 2)	=	+ 8	
233 — (— 4) (— 2) . (— 4)	=		— 32
242 — (— 4) . 3 . 3	=		— 36
314 — 5 . 3 . (— 2)	=		— 30
323 — 5 . 1 . (— 4)	=		— 20
332 — 5 (— 2) . 3	=		— 30
341 — 5 . 3 . 5	=	+ 75	
413 — (— 6) . 3 . (— 4)	=	+ 72	
422 — — 6 . 1 . 3	=		— 18
431 — (— 6) (— 2) . 5	=	+ 60	
		223	— 190 = + 33

Mithin das gesuchte Glied $+ 33\, x^{1}$

aus den Inbegriffen von Variationsformen, die in einer niedrigern Classe den successiven Summen angehören, den Betrag aller derjenigen finden, welche in einer nächsthöheren Classe zu einer gewissen Summe gehören werden. Man setzt den schon berechneten Inbegriffen die in der vorhergehenden Classe zu successiv folgenden Summen gehören, jedem das Element der neuen Reihe, die sich mit den vorigen verbinden soll, bey, dessen Zahl mit der Summe, die sich in jenem Inbegriffe dargestellt hat, die verlangte Summe voll macht. Es ist nicht nöthig bey diesem Verfahren weiter zu verweilen, denn es ist kein andres als das in der gemeinen Regel des Multiplicirens vorgeschriebene.

Ein specieller Fall unsrer vorigen allgemeinen Aufgabe verdient nähere Erwägung: wenn alle Factoren völlig unter einander gleichgesetzt worden sind, das heißt also, wenn von einem Ausdruck, welcher regelmäßig nach Potenzen einer gewissen Hauptgröße fortschreitet, eine beliebige Potenz, deren Exponent eine ganze positive Zahl ist, gefodert werden sollte. In Zeichen $(ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 \ldots)^m$

Die allgemeine Regel der Multiplication behält natürlich alsdann ihre volle Gültigkeit. Aber es wird jetzt leichter, die Werthe der Variationsformen zu berechnen, weil jedes Element ihres Index, es stehe in welcher Stelle es wolle, eine feste Bedeutung, und immer die nemliche, hat. Aus eben dieser Ursache müssen alle die Variationsformen für identisch angesehn werden, welche bloß in Absicht der Folge ihrer

Elemente von einander verschieden sind: denn sie bedeuten Producte, in denen die nemlichen Factoren, nur in geänderter Folge, vorkommen. Man wird sich folglich bey der Bildung dieser Formen begnügen können, nur eine von ihnen würklich anzugeben, und daneben zu bestimmen, wie oft sie, durch Versetzung ihrer Elemente geändert, vorkommen werde. Es ist also hier hinlänglich, um jeden Coefficienten des Products zu erhalten, wenn man alle Combinationsformen zu der Summe, welche der Exponent der im Gliede vorkommenden Potenz angibt, entwickelt, und jeder ihre Permutationszahl beyfügt.

So entsteht die Idee einer neuen combinatorischen Operation, des Combinirens zu bestimmten Summen, deren Regel indessen bloße Modificationen von denen des Variirens seyn werden. Man soll aus einer gegebenen Elementen-Reihe alle möglichen, dem würklichen Inhalt nach, von einander verschiedenen Complexionen entwickeln, die (wenigstens hier) zu der nemlichen Classe gehören, und deren Elemente immer dieselbe Summe geben. Das Zeichen für Combinationsformen ist C; man mag den Rang ihrer Classe darüber, die Zahl der Summe, wozu sie gehören sollen, zur linken daneben setzen, so das $^{n}\overset{m}{C}$ alle Combinationsformen der m^{ten} Classe, die zur Summe n gehören, bedeuten wird.

Es ist unnöthig, die Regeln des Verfahrens bey dieser Operation weitläuftig zu entwickeln. Die Ableitung der Formen aus einander durch Coordination bleibt ganz

dieselbe, wie sie es beym Variiren war, so bald man die Beschränkung hinzufügt, daß hier bey dem Ausfüllen leer gewordener Stellen niemals ein kleineres Element auf ein größeres folgen darf *a*). Ebenso bleiben alle subordinirenden Methoden völlig wie bey dem Variiren zu bestimmten Summen, unter beygesetzter Einschränkung, daß das Vorsetzen oder Austauschen der Elemente keine Unordnung in die neuen Formen

---

a) Wenn die Reihe der Elemente unbedingt fortgeht, so sind die Formen für $^{7}\overset{4}{C}$ folgende

115
124
133
223

Bräche die Elementenreihe mit dem Element 6 ab, so wäre z. E. $^{12}\overset{5}{C}$

11136
11145
11226
11235
11244
11334
12225
12234
12333
22224
22233

Die näheren Anleitungen zur Combinationslehre enthalten einen großen Reichthum von recurrirenden Regeln für Variationen und Combinationen zu bestimmten Summen, womit sich jeder bekannt machen mag, den diese Untersuchungen über das Bedürfniß der allgemeinen Arithmetik hinaus interessiren.

bringen darf. Dadurch geht dann freylich hier die Möglichkeit, aus niedrigern Inbegriffen, ohne ihre einzelnen Formen zu berühren, durch bloßes Anfügen neuer Elemente, zu höheren aufzusteigen, verloren.

Combinatorisch also muß die Regel für die Potenzirung einer Form, die von der ersten Potenz der Hauptgröße anhebt, und durch die folgenden regelmäßig fortschreitet, allerdings so ausgesprochen werden: man bilde die successiven Potenzen der Hauptgröße, von derjenigen anhebend, die dem Grade der verlangten Potenz selbst gleichkommt, und gebe jeder zum Coefficienten den Inbegriff aller Producte, die sich aus den Coefficienten als Elementen, zu einer Combinationsclasse gehörig, deren Rang der Grad der gefoderten Potenz, deren Summe die Potenz im jedesmaligen Gliede andeutet, bilden lassen. In Zeichen (wenn der Buchstabe p, vor ein combinatorisches Zeichen gesetzt, andeuten soll, daß jede der in demselben gefoderten Formen mit ihrer gebührenden Versetzungszahl multiplicirt werden muß): $|ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 \ldots|^m = p^m \overset{m}{C} x^m + p^{m+1} \overset{m}{C} x^{m+1} p^{m+2} \overset{m}{C} x^{m+2} . + p^{m+r} \overset{m}{C} x^{m+r}$, wobey sich das Zeichen C auf die Elemente a, b, c, d . . . bezieht. Aber brauchbar wird diese Regel nur dann seyn, wenn man ein einzelnes herausgerissenes Glied aus dem berechneten Werthe der Potenz verlangt, wo man am bequemsten durch das coordinirende Verfahren alle Formen, die zu dessen Coefficienten gezogen werden müssen, ableiten, und

hernach durch die reellen Elemente realisiren wird *b*). Wenn hingegen alle Glieder der berechneten Potenz, vom ersten an, bis zu einer bestimmten Höhe, gefodert werden, so hilft keine von den subordinirenden Regeln, vermöge deren aus Combinationsformen, die an Rang oder Summe niedriger sind, andre höhere abgeleitet werden können, bey der würklichen Berechnung auf eine wesentliche Art. Man wird ohne Vergleich schneller zum Zweck gelangen, wenn man alle diese scheinbaren Abkürzungen, welche die Gleichheit der gegebenen Factoren verspricht, gänzlich aufgibt, und den gewöhnlichen Mechanismus des ganz gemeinen Multiplicirens dafür an die Stelle setzt.

---

b) Würde z. E. von der Potenz

$$|2x + 4x^2 - 3x^3 + 5x^4 - 4x^5|^6$$

das 7te Glied nach dem anfänglichen verlangt, so wäre es $p^{6+7}\overset{6}{C}x^{6+7}$, und es käme darauf an $^{13}\overset{6}{C}$ aus den, durch die Zeichen 1, 2, 3, 4, 5 angedeuteten Elementen 2, 4, −3, 5, −4, zu bilden.

Nun ist $^{13}\overset{6}{C}$ aus diesen beschränkten Elementen; mit beygefügten Vorsetzungszahlen realisirt

$30)\,111145 - 30)\,2^4.5.(-4) = -9600$

$120)\,111235 - 120)\,2^3.4.(-3).(-4) = +46080$

$60)\,111244 - 60)\,2^3.4.5^2 = 48000$

$60)\,111334 - 60)\,2^3(-3)^2.5 = 21600$

$60)\,112225 - 60)\,2^2.4^3.(-4) = -61440$

$180)\,112234 - 160)\,2^2.4^2.(-3).5 = -172800$

$60)\,112333 - 60)\,2^2.4.(-3)^3 = -25920$

Summe $+115680 - 269760 = -154080$

Es ist also das gesuchte 7te Glied nach dem anfänglichen $-154080\,x^{13}$

Wir können nun unsre Betrachtungen über die Multiplication von Ausdrücken, die sich gleichmäßig nach successiven Potenzen einer gemeinschaftlichen Hauptgröße gebildet haben, insofern noch erweitern, daß wir in ihrem ersten Gliede nicht eben die erste Potenz, in den folgenden die allmälig immer nur um eine Einheit höher werdenden setzen. Es mag allgemein die Potenz im ersten Gliede jede beliebige seyn, die in den folgenden Gliedern durch beständiges Hinzukommen einer unabänderlichen, übrigens willkührlichen zweyten Größe sich erzeugen, kürzer die Exponenten der Potenzen mögen irgend eine arithmetische Progression darstellen. In Zeichen: der Ausdruck mag die Gestalt $ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta} \ldots$ haben, wobey α und δ nach Belieben ganz oder gebrochen, positiv oder negativ seyn darf. Ist nur diese Gestalt für alle Factoren die nemliche, so erhält sich, mit einer geringen Modification, die ganze vorige Regel der Multiplication. Man sondre in jedem der gegebenen Ausdrücke die Potenz, welche er im ersten Gliede enthält, als Factor ab, multiplicire alle Glieder mit der Potenz, welche im zweyten Gliede geblieben war, vergüte aber diese Multiplication durch Division an dem vorher abgesonderten Factor. In Zeichen: man verwandle $ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta} \ldots$ in $x^{\alpha-\delta}(ax^{\delta} + bx^{2\delta} + cx^{3\delta} \ldots)$ Alsdann erscheinen die Grade der Potenzen, die in den Gliedern des aus Theilen zusammengesetzten Factors liegen, als successive Vielfache derjenigen, welche der erste Theil

enthält, so daß, wenn man die letztere für den Augenblick als eine einfache Hauptgröße ansehn, in Zeichen $x^3 = u$ setzen wollte, jeder von den complexen Factoren, für sich betrachtet, in die anfängliche Grundform, $au + bu^2 + cu^3 \ldots$ zurückfallen würde. Für das Product aus solchen Factoren aber haben wir die vollständige Regel entwickelt. Man braucht also nur diese Regel beyzubehalten, in ihrem Resultate für die einstweilig eingeführte Hauptgröße deren anfänglichen Werth wieder zurückzusetzen, $u = x^3$, und die Glieder des Products mit den aus den Factoren anfangs abgesonderten Potenzen der Hauptgröße zuletzt noch sämmtlich zu multipliciren. So entspringt folgende allgemeine Regel. Das Product mehrerer Ausdrücke, die von einer beliebigen Potenz der Hauptgröße ausgehn, und in denen die Exponenten nach derselben arithmetischen Progression fortlaufen, ist ein Ausdruck, in welchem das erste Glied die Summe aller der Exponenten, die in den ersten Gliedern der Factoren vorkommen, als den seinigen enthält; in welchem die folgenden Exponenten nach der nämlichen Progression, wie die in den Factoren forschreiten; in welchem endlich die Coefficienten Inbegriffe von Variationsformen seyn werden, deren Grad die Zahl der gegebenen Factoren, deren Summe eben diese Zahl, durch die des Gliedes wozu sie gehören sollen, vermehrt, ausdrücken wird. Es versteht sich, daß die successiven Coefficienten der Factoren die Elementen-Reihen darstellen, woraus sich Variationsformen bilden; daß die durch sie angedeuteten reel-

len Elemente mit einander multiplicirt, die Producte selbst aber durch Addition verbunden werden müssen. In Zeichen. Wenn mehrere Reihen, wie

$$\left.\begin{array}{l} a x^{\alpha} + b x^{\alpha+\delta} + \ldots \\ A x^{\beta} + B x^{\beta+\delta} \ldots \\ \mathfrak{A} x^{\gamma} + \mathfrak{B} x^{\gamma+\delta} \ldots \end{array}\right\} \text{ gegeben sind, so wird}$$

ihr Product mit $x^{(\alpha+\beta+\gamma\ldots)}$ anheben, und im r^{ten} Gliede nach dem anfänglichen $x^{(\alpha+\beta+\gamma\ldots)+r\delta}$ enthalten. Ist m die Zahl der vorhandenen Factoren, so wird $^{r+m}\overset{m}{C}$ der Coefficient des r^{ten} Gliedes seyn.

Die allgemeinste Form des polynomischen Satzes für ganze positive Exponenten ist ein besonderer Fall dieser allgemeinen Regel, und kann, ihr gemäß, so in Zeichen ausgedrückt werden: $(ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta}\ldots)^{m}$

$$= p^{m}\overset{m}{C}x^{\alpha m} + p^{m+1}\overset{m}{C}x^{\alpha m+\delta}. + p^{m+r}\overset{m}{C}x^{\alpha m+r\delta}.$$

wobey sich das Zeichen C auf die Coefficienten a, b, c, .. als Elemente bezieht.

Haben die Factoren, deren Product berechnet werden soll, die einfache Gestalt, welche anfangs der Grundform für die allgemeine Arithmetik beygelegt ist, $a + bx + cx^{2} + dx^{3} + \ldots$, so erhellet aus der vorigen Regel, daß ihr Product genau dieselbe Gestalt besitzen werde, $A + Bx + Cx^{2} + Dx^{3} \ldots$, und das die Coefficienten desselben Variationsformen aus denen der Factoren seyn werden, zu einer Summe gehörig, welche sich findet, wenn man die Zahl der gegebenen Factoren, und die des gefoderten Coefficienten zusammen addirt.

Die beschwerlichste Arbeit tritt ohne Zweifel alsdann bey der Multiplication ein, wenn die zusammengesetzten Factoren, woraus ein Product gebildet werden soll, in Absicht auf die Exponenten der in ihren einzelnen Gliedern vorkommenden Potenzen ungleichförmigen Bau besitzen. Sind die Progressionen dieser Exponenten in den verschiedenen Factoren gänzlich verschieden, so ist an keine Vereinigung der Partialproducte, welche die Multiplication geben wird, im Allgemeinen zu denken. Ist aber die Progression der Exponenten in allen Factoren dieselbe, und fehlen nur hin und wieder einzelne Glieder dieses oder jenes Ranges in ihnen, so bleibt es zwar im Allgemeinen bey den vorigen Regeln. Aber es würde eine überflüssige Weitläuftigkeit geben, wenn man das Product zuerst so berechnen wollte, als wenn alle seine Factoren in gänzlicher Vollständigkeit ihrer einzelnen gleich hohen Glieder vorhanden wären; zuletzt wieder weglassend, was als nicht vorhanden angesehn werden dürfte, weil eins oder das andre der Elemente, woraus es sich zusammensetzen sollte, als $= 0$ betrachtet werden müßte. Es entsteht also die Frage, ob sich nicht aus mehreren gegebenen Reihen, deren jede einen besondren Index erfordert, weil in ihr Elemente fehlen oder vorhanden sind, die in andern vorkommen oder vermißt werden, alle möglichen Variationsformen zu einer beliebig vorgeschriebenen Summe bilden lassen? Man kann diese Formen entweder independent, oder durch Recursion finden. Im ersten Falle würde man genöthigt seyn, vorausgesetzt daß die Va-

riationsformen unter einander geschrieben werden, über jede Stelle die Elemente der Reihe, woraus diese Stelle besetzt werden soll, vertical über einander zu setzen. Uebrigens würden die Regeln für die Ableitung der einzelnen Formen die vorigen bleiben; es müßte bloß noch die Bedingung, nur solche Elemente in eine Stelle zu setzen, die sich in der Reihe der über dieser Stelle stehenden fänden, hinzugefügt werden *c*). Unter

---

c) Sollte von den Factoren

$$x - 3x^2 + 5x^4 - 2x^6$$
$$2x + 4x^3 - 6x^5$$
$$3x - 8x^4 + 2x^5 + 3x^6$$

das Product berechnet, und zu dem Gliede, welches x^{10} enthalten würde, der Coefficient gesucht werden, so wäre die combinatorische Andeutung desselben, $^{10}\overset{3}{V} x^{10}$. Um alle Variationsformen zur Summe 10 aus den gegebenen Coefficienten als Elementen zu erhalten, bezeichnete man die des ersten Factors 1, −3, 5, −2; die des zweyten 2, 4, −6;
mit 1, 2, 4, 6 — mit 1, 3, 5
die des dritten 3, −8, 2, 3, und bekäme alsdann
mit 1, 4, 5, 6
für die independente Ableitung der geforderten Variationsformen zur Summe 10 folgendes Schema:

6		6
4	5	5
2	3	4
1	1	1

			realisirt			
1	3	6	1 . 4 . 4	=	+ 12	
1	5	4	1 . (−6) . (−8)	=	48	
2	3	5	(−3) . 4 . 2	=		− 24
4	1	5	5 . 2 . 2	=	20	
4	5	1	5 (−6) 3	=		− 90
6	3	1	(−2) . 4 . 3	=		− 24

Summe + 80 − 138 = − 68

Mithin das verlangte Glied des Products $= -68x^{10}$

den recurrirenden Methoden, die sich für die Ableitung der Variationsformen bey diesen Umständen angeben ließen, ist für die würkliche Berechnung keine brauchbar, als die, welche sich in dem gemeinen Multiplicationsverfahren von selbst beobachtet findet, deren Regel also noch besonders zu entwickeln sehr überflüssig seyn würde.

Die allgemeine Regel für die Bestimmung der Gestalt, welche das Product aus beliebig angenommenen zusammengesetzten Factoren annehmen muß, läßt insofern eine Umkehrung zu, als man in den Fall kommen kann, für jede willkührlich angenommene Potenz der Hauptgröße zu fragen, in dem wievielsten Gliede der Products sie erscheinen werde. Man ziehe den Grad des Potenz, welchen das Anfangsglied des Products enthalten muß, von dem jener angenommenen ab; der Rest, durch die Differenz der in den Exponenten der successiven Glieder von den Factoren herrschenden arithmetischen Progression dividirt, gibt die verlangte Zahl des problematisch angenommenen Gliedes.

Es verdient, als eine, in manchen Fällen brauchbare, in den vorhin entwickelten bestimmten Regeln enthaltene, allgemeine Bemerkung noch besonders hervorgehoben zu werden, daß bey einem Producte aus mehreren regelmäßigen Formen, der Coefficient jedes Gliedes zwar allerdings aus den Coefficienten mehrerer, in den Factoren liegender Glieder zusammengesetzt wird, aber daß zu seiner Bildung nur soviele

von den ersten Coefficienten der Factoren beytragen können, als seine eigne Zahl Einheiten enthält. Diese Bemerkung ist unter andern in allen den Fällen von Erheblichkeit, wo man durch anderweltige Entwicklung die Factoren erst ableiten muß, aus denen ein Product erzeugt werden soll, weil vermöge ihrer vorgeschrieben wird, wie weit man in der Entwickelung der Factoren zu gehn braucht, wenn die Zahl der Glieder bestimmt ist, welche für das Product berechnet werden sollen. In dem besonderen Falle gleicher Factoren, bleibt im Allgemeinen dieselbe Regel, aber sie kann noch genauer bedingt werden, vorzüglich alsdann, wenn die gegebene Form nicht mit einem bestimmten Gliede abbricht. Wird eine, unbestimmt fortschreitende, Form, auf die Potenz eines ganzen positiven Exponenten erhoben, so bildet sich jeder Coefficient des Resultats aus eben so vielen von den ersten Coefficienten der gegebenen Form, als seine Zahl Einheiten hat; der erste Coefficient der Potenz aus dem ersten der Grundform, der zweyte aus den beyden ersten ebenderselben, der dritte aus den drey ersten, und so fort. Dabey darf man ferner behaupten, daß jeder Coefficient der Grundform, wo er zum ersten Male bey der Berechnung von den Gliedern erscheint, nur in einem einzigen Producte, und in ihm nur auf die erste Potenz erhoben, auftreten könne. Dies erhellet aus der Natur des combinatorischen Verfahrens, wodurch sich aus den Coefficienten der gegebenen Grundform, als Elementen, die Coefficienten der Potenz erzeugen.

Sie sind Inbegriffe aller Combinationsformen, zu der Summe gehörig, welche die Zahl des gefoderten Gliedes, durch den Grad der verlangten Potenz vergrößert, vorschreibt, und in die Classe fallend, welche der Grad der vorgeschriebenen Potenz anzeigt. Nun aber wird die niedrigste Form eines solchen Inbegriffs erhalten, wenn man alle vorhandenen Stellen mit dem ersten Elemente besetzt, und nur in die allerletzte Stelle dasjenige Element bringt, dessen Zahl zu der von jenen gerechnet, die gefoderte Summe voll macht. Alle übrigen höheren Formen, weil sie in früheren Stellen Höheres enthalten müssen, können in der letzten Stelle kein so hohes Element besitzen, als die niedrigste Form in sich schloß, und es ist unmöglich, daß eben dieses Element in einer früheren Stelle wieder erscheine, weil es sonst, den Regeln des Combinirens zu Folge, auch in allen späteren Stellen stehen müßte, welches eine, über die vorgeschriebene Summe weit hinausgehende, erzeugen würde. In Zeichen: Wenn $[\overset{1}{a}x^{m} + \overset{2}{a}x^{m+d} + \overset{3}{a}x^{m+2d} .. + \overset{r}{a}x^{m+(r-1)d} ..]^{n}$ berechnet werden soll, so bildet sich der Coefficient des ersten Gliedes im Resultat aus $\overset{1}{a}$; der des zweyten aus $\overset{1}{a}$ und $\overset{2}{a}$; allgemein, der des r^{ten} aus allen Coefficienten von $\overset{r}{a}$ an hinab bis $\overset{1}{a}$. Und zwar kommt in allen den Producten, woraus der Coefficient des r^{ten} Gliedes entsteht, nur eins vor, in welchem $\overset{r}{a}$ enthalten ist, alle übrigen sind aus niedrigeren Coeffi-

cienten der Grundform zusammengesetzt. Dieses eine Product, wenn es bestimmt dargestellt werden soll, ist, mit seiner gebührenden Permutationszahl versehn, $m.\overset{1}{a}^{m-1}\overset{r}{a}$, wobey sich von selbst versteht, daß für $r = 1$ die vorgesetzte Permutationszahl wegfallen wird. Der Gebrauch dieses Satzes wird sich im Folgenden zeigen.

Siebentes Kapitel.

Division zusammengesetzter Formen. Anwendung der dabey gebrauchten Methode zur Summirung gleich hoher Potenzen von allen Wurzeln einer unaufgelösten Gleichung.

Auf eben die Art, wie wir in den vorhergehenden Betrachtungen für die Multiplicationen von Formen, die nach Potenzen einer beliebigen Hauptgröße gleichmäßig fortschreiten, allgemeine Regeln gefunden haben, welche es möglich machen, jedes einzelne Glied des Products, dem allgemeinen Gesetze seiner Bildung gemäß, zu bestimmen, muß sich auch bey der Division ähnlicher Formen, für jedes Glied des dadurch entstehenden Quotienten und übrig bleibenden Restes, eine allgemeine Regel der Entwicklung finden lassen.

Aber es liegt in der Natur der Sache, daß der Gang der Untersuchung hier anders ausfallen wird, als dort. Die Multiplication ist eine ursprüngliche

zusammensetzende Operation, die Division hingegen wird als das Umgekehrte von ihr, mithin schon als abgeleitet gedacht. Die Definition des Quotienten lautet bekanntlich: er ist eine Zahl, deren Product mit dem Divisor, den Dividendus selbst wieder geben muß. Wir brauchen nur diese Definition in Zeichen ausgedrückt darzustellen, um die Art zu entdecken, wie sie uns zur Auflösung führen wird.

Daß der Quotient zweyer nach Potenzen der nämlichen Hauptgröße auf gleiche Weise fortschreitenden Formen, eine dritte, eben so, wie sie, gebildet seyn werde, darf man gewiß nicht annehmen, denn es kann nur in seltnen Fällen statt finden. Faßt man hingegen die Frage so: ob es nicht eine, bis zu einem bestimmten Grade aufsteigende, Form geben könne, deren Product mit dem Divisor, bis zu eben diesem Grade hinauf, völlig identisch mit dem Dividend werden müßte, so steht ihrer Beantwortung keine Schwierigkeit entgegen.

Man nehme unbestimmt eine solche Form als schon gefunden an, wobey also für die Coefficienten ihrer einzelnen Glieder unbestimmte Zeichen gebraucht werden müssen, berechne ihr Product mit dem Divisor, und setze es als identisch mit dem Dividend. Eine solche Identität zweyer Formen fodert gänzliche Uebereinstimmung aller gleich hohen Glieder, also namentlich der Coefficienten, die in diesen beyden vorhanden sind. Man wird solcher Gleichungen so viele bekommen, als die Form, welche man für den Quotienten angenommen hatte, Glieder enthält, das heißt so viele, als man in

ihr Coefficienten vorläufig fingirt hatte. Sieht man also diese Coefficienten als unbekannte Größen an, so hat man eben so viele Gleichungen, als unbekannte Größen vorhanden sind; es ist folglich die Möglichkeit gegeben, jede derselben zu bestimmen.

Um die nähere Entwickelung der durch das oben Gesagte vorläufig angedeuteten Untersuchung mit der gehörigen Einfachheit zu beginnen, wollen wir von dem Falle ausgehn, wo der Dividend die Einheit, der Divisor hingegen eine regelmäßige, ins Unbestimmte fortschreitende Form ist. Kann man für diesen Fall den Quotienten finden, so bedarf es nur einer Multiplication desselben mit der Form, die man nachher, bey einer allgemeineren Voraussetzung, als Dividend angenommen haben mögte. Wir wollen ferner das erste Glied des Divisors die Einheit seyn lassen, den Coefficienten der folgenden sämtlich das — Zeichen beylegen. Alle diese Coefficienten mögen durch den nemlichen Buchstaben, dem aber die Zahl eines jeden als Index übergesetzt wird, ihre Andeutung erhalten. In Zeichen also: es soll der Quotient $\frac{1}{1 - \overset{1}{a}x^1 - \overset{2}{a}x^2 \ldots - \overset{n}{a}x^n \ldots}$ entwickelt werden.

Den vorhin angedeuteten Weg betretend, nehmen wir eine ähnlich gebaute Form von unbestimmtem Grade, mit noch unbekannten, aber vorläufig fingirten Coefficienten an:

$$1 + \overset{1}{A}x^1 + \overset{2}{A}x^2 \ldots + \overset{n}{A}x^n$$

Wir berechnen, bis zu eben dem Grade, das Product aus ihr und dem Divisor, um es dem Dividend identisch zu setzen. Das Product aus zwey solchen Formen

$$1 + \overset{1}{A}x^1 + \overset{2}{A}x^2 \,..\, + \overset{r}{A}x^r \,..\, + \overset{n}{A}x^n \,..$$
$$1 - \overset{1}{a}x^1 - \overset{2}{a}x^2 \,..\, - \overset{r}{a}x^r \,..\, - \overset{n}{a}x^n \,..$$

ist leicht gefunden. Sein Anfangsglied ist 1, es schreitet in den folgenden regelmäßig nach Potenzen von x fort. Der Coefficient irgend eines folgenden Gliedes wird gefunden, wenn man alle Coefficienten der oberen Reihe, von dem an, dessen Zahl so hoch ist als die des verlangten Gliedes, bis zu dem des Anfangsgliedes hinab, setzt, und zu jedem von ihnen einen der unteren Reihe, dessen Zahl mit der seinigen die des verlangten Gliedes ausmacht, multiplicirend hinzufügt. In Zeichen: das Product ist

$$1 + \left.\begin{matrix}\overset{1}{A}\\ -\overset{1}{a}\end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix}\overset{2}{A}\\ -\overset{1}{a}\overset{1}{A}\\ -\overset{2}{a}.\end{matrix}\right\} x^2 \,..\, + \left.\begin{matrix}\overset{r}{A}\\ -\overset{1}{a}\overset{r-1}{A}\\ -\overset{2}{a}\overset{r-2}{A}\\ -\overset{r-1}{a}\overset{1}{A}\\ -\overset{r}{a}.\end{matrix}\right\} x^r \,...$$

Nun aber war der Dividend, welchem dieses Product in allen seinen, bis zu einem beliebigen Grade berechneten Gliedern, identisch seyn soll, selbst nur 1. Soll also die gefoderte Identität herauskommen, so muß, weil schon das Anfangsglied unsres Products gleichfalls 1 ist, jedes der nachfolgenden in der That nichts

seyn, das heißt, o zum Coefficienten haben. Und eben indem wir allmälig jeden dieser Coefficienten nehmen, um ihn = o zu setzen, fragend, wie die fingirten Coefficienten bestimmt werden müssen, damit jene Voraussetzung bestehn könne, findet sich jeder von diesen letzten auf eine leichte und unzweydeutige Weise. Denn es ist aus den Gesetzen der Multiplication bekannt, daß zu jedem Coefficienten eines Products nur so viele von den ersten Coefficienten jedes Factors beytragen, als dessen Zahl Einheiten enthält. Im ersten Coefficienten nach dem Anfangsgliede $\overset{1}{A} - \overset{1}{a}$, erscheint nur der erste des fingirten Quotienten; dieser bestimmt sich also, wenn man jenen = o setzt: $\overset{1}{A} - \overset{1}{a} = 0$ gibt $\overset{1}{A} = \overset{1}{a}$. Im zweyten Coefficienten des Products liegen nur die beyden ersten des fingirten Quotienten; von ihnen ist der erste schon gefunden; setzt man also das Ganze = o, so ergibt sich daraus der zweyte: aus $\overset{2}{A} - \overset{1}{a}\overset{1}{A} - \overset{2}{a} = 0$ folgt $\overset{2}{A} = \overset{1}{a}\overset{1}{A} + \overset{2}{a}$. Allgemein, in jedem Coefficienten des Products liegen so viele von den ersten Coefficienten des fingirten Quotienten, als seine Zahl Einheiten enthält, so daß der höchste ganz allein in einem besondren Gliede steht, jeder der andern mit einem, aus den Coefficienten des Divisors hergenommenen, Factor, ein eigenes Glied der ganzen Zusammensetzung ausmacht: $\overset{r}{A} - \overset{1}{a}\overset{r-1}{A} - \overset{2}{a}\overset{r-2}{A} \ldots - \overset{r-1}{a}\overset{1}{A} - \overset{r}{a} . 1$. Setzt man also das Ganze = o, so

bekommt man eine Gleichung, vermöge deren, durch Transposition aller Glieder außer dem anfänglichen, der höchste der fingirten Coefficienten bestimmt werden kann, vorausgesetzt, daß die Werthe der vorhergehenden schon früher gefunden sind: $\overset{r}{A} = \overset{1}{a}\overset{r-1}{A} + \overset{2}{a}\overset{r-2}{A} + \ldots \overset{r-1}{a}\overset{1}{A} + \overset{r}{a}\,1$.

Diese Regel, vermöge deren sich aus den früheren Coefficienten des Quotienten die successiv folgenden ableiten, ist sehr einfach, und kann sogleich folgendermaßen ausgesprochen werden. Man setze die schon gefundenen Coefficienten des Quotienten, auch den des Anfangsgliedes, 1, mitgenommen, in umgekehrter natürlicher Ordnung, füge ihnen die des Divisors, ohne das — Zeichen, welches sie in ihm führen, (den anfänglichen, welcher 1 ist, nicht mitgerechnet) in natürlicher Ordnung als Factoren bey, und addire alle diese Producte, so erhält man den gesuchten nächsthöheren Coefficienten. Will man die successiven Glieder des Quotienten nach der Reihe erhalten, so ist es nicht möglich eine kürzere und bequemere Regel der Rechnung als diese, zu geben *d*).

d) Es ist leicht, dieses Divisionsverfahren auf einen einfachen Mechanismus zu bringen. Man setze z. E. die allmälig hervorgehenden Coefficienten des Quotienten in eine Hauptreihe vertical unter einander. Zur Linken setze man, von unten anfangend, die folgenden Coefficienten des Divisors in natürlicher Ordnung neben den Gliedern jener Hauptreihe herauf; bilde alle Producte aus diesen hori-

Der Verlauf dieser Untersuchung ist besonders darum sehr merkwürdig, weil sie uns das erste Bey-

---

zontal nebeneinander stehenden Zahlenpaaren, setze sie zur Rechten der Hauptreihe neben die Stelle des folgenden Coefficienten horizontal neben einander, und addire sie; ihre Summe ist der gesuchte folgende Coefficient. So erhielte z. E. die Rechnung, wodurch die 5 ersten Coefficienten des Quotienten aus $\frac{1}{1-2x-5x^2-3x^3-4x^4}$ gefunden werden, folgendes Schema

4, 3, 5, 2	1	
3, 5, 2	2	2
5, 2	9	4 5
2	31	18 10 3
	117	62 45 6 4

Es wäre also der Quotient $1+2x+9x^2+31x^3+117x^4+\ldots$

Noch bequemer und einfacher würde das Verfahren, wenn man ein für allemal die Coefficienten des Divisors in natürlicher Ordnung auf ein besondres Blatt schreiben, und dasselbe bey jeder neuen Operation an der Columne der schon gefundenen Coefficienten des Quotienten nur eine Stelle weiter hinunterschieben wollte. Die zu summirenden Producte könnten auch in Verticalreihen, so daß sie ihren Factoren zur Seite gestellt würden, neben einander zu stehn kommen, so daß alsdann, vielleicht noch bequemer wie vorhin, das Schema der Rechnung, wobey die verschiebbare Verticalreihe der Coefficienten dieses Divisors in ihrer letzten Lage dargestellt werden mag, folgendes seyn würde

4	1	2	5	3	4
3	2		4	10	6
5	9		9	18	45
2	31			31	62
	117				117

spiel eines Verfahrens darbietet, zu welchem sich die Analysis allenthalben genöthigt sieht, wo ihr Operationen vorgeschrieben werden, welche das Umgekehrte von andern directen und ursprünglichen sind. Sie muß alsdann jedesmal, so wie hier, das Gesuchte als schon gefunden annehmen, es in directe Rechnungen verflechten, und rückwärts, durch Gleichsetzung des daraus Entstandenen mit bekannten Formen, Gleichungen gewinnen, aus denen das Angenommene bestimmt werden kann. Alsdann aber entstehn jedesmahl ähnliche Beziehungen, wie sie sich vorhin ergaben. Die Coefficienten der Form, welche das Resultat der Rechnung seyn soll, werden nicht ursprünglich und independent aus denen der gegebenen Formen ausgedrückt erscheinen; man wird nur Gleichungen, in denen sie mit sich und den gegebenen Größen vermischt vorkommen, erhalten, und in diesen ein Mittel finden, durch Hülfe früherer unter diesen Coefficienten, allmälig folgende höhere zu berechnen. Mit Recht nennt man dieses Verfahren **recurrirende Bestimmung**. Wir werden eine solche bey den nachfolgenden

---

Dabey hätte man die Bequemlichkeit, wenn die Producte, welche zu einer Summe gehören, verschiedene Zeichen haben sollten, statt einer Verticalreihe deren zwey, nebeneinander und zusammengehörig eine für die positiven, die andre für die negativen Producte anlegen, und so die Summe von allen leichter erhalten zu können.

Untersuchungen in unendlich mannichfaltigen Gestalten wiederfinden *e*).

Aber die bey der Division beabsichtigte Untersuchung ist durch dieses recurrirende Verfahren keinesweges beendigt; den Foderungen der Theorie ist nicht eher Genüge geleistet, als bis wir für jedes einzelne Glied des Quotienten in deutlichen Begriffen anzugeben vermögen, aus was für Gliedern des Dividends und Divisor's, und auf welche Art aus ihnen es sich zusammensetze. Der independente Ausdruck für jedes Glied eines gesuchten Resultats ist immer der höchste Zweck der Analysis, sey es auch, daß sie sich bey der

---

e) Der gewöhnliche analytische Sprachgebrauch nennt im Allgemeinen eine Reihe recurrirend, wenn nach einem bestimmten Gesetze jeder folgende ihrer Coefficienten aus vorhergehenden berechnet werden kann. Er scheint dabey nur den sehr speciellen Fall der Division vor Augen gehabt zu haben, indem er unbedingt annimmt, daß dieses Gesetz jedesmal darauf zurückkommen müsse, daß mit gewissen, der Ordnung und Größe nach unabänderlich bestimmten Factoren, deren Reihe die Recursionsscale genannt zu werden pflegt, die vorhergehenden Coefficienten in umgekehrter Ordnung multiplicirt werden, damit die Summe dieser Producte den nachfolgenden gebe. Es ist offenbar unschicklich, die Reihe selbst recurrirend zu nennen, weil zufällig ihre Coefficienten durch Recursion bestimmt werden; die Idee der Recursionsscale paßt nur auf einen individuellen Fall der möglichen Beziehung von Coefficienten, die derselben Reihe angehören; wir wollen uns also dieser Terminologie im Folgenden enthalten.

Berechnung aller Glieder mit großem Vortheil bewiesener Recursionen unter ihnen bediene.

Die jetzt noch zu lösende Aufgabe würde so im Allgemeinen gefaßt werden können. Man hat gegebene Größen oder Elemente. Es ist von andern die Rede, welche successive Verbindungen aus ihnen in sich schließen. Man kennt diese andern selbst noch nicht, aber man hat eine allgemeine Regel, vermöge deren die Art, wie jede höhere von ihnen durch bestimmte Verbindung der gegebenen Elemente mit den vorhergehenden niedrigeren aus diesen gebildet werden kann, vorgezeichnet ist. Man sucht daraus eine independente Idee ihrer Zusammensetzung aus jenen gegebenen Elementen. Die Beantwortung der Frage kann nur auf combinatorischem Wege gelingen. Jede combinatorische Operation fodert gewisse Zusammenstellungen aus gegebenen Elementen. Sie kann auf independentem Wege vollzogen werden; sie kann aber auch recurrirend, so daß man aus niedrigeren oder früheren Verbindungen, Elemente anfügend oder vertauschend zu höheren fortschreitet, zu Stande kommen. Sobald es sich also bey der recurrirenden Bildung gewisser Größen durch Hinzufügen gegebener Elemente findet, daß man dabey genau nach derselben Ordnung und Regel verfährt, wie bey der Bildung gewisser höherer combinatorischer Formen-Inbegriffe aus andern niedrigern, so hat man entdeckt was man suchte. Jene Größen sind alsdann selbst, in Absicht auf ihre Entstehung aus den gegebenen Elementen, nichts

anders als eben solche combinatorische Formen-Inbegriffe, aus diesen Elementen gebildet.

Die Anwendung dieser allgemeinen formalen Regel auf den vorliegenden Fall bey der Division ist leicht. Das Bilden von Variationsformen zu bestimmten Summen, wenn man in größter Allgemeinheit, ohne auf Unterschied in Absicht auf Classen zu sehn, alle diejenigen verlangt, welche der nemlichen Summe angehören, bietet sich augenblicklich dar. Wenn man alle Variationsformen zu den successiven niedrigern Summen schon hat, und aus ihnen, alle die der nächsthöheren Summe angehören, ableiten will, so setzt man jedem Inbegriff, der einer gewissen Summe angehört, das Element bey, welches seine Summe zu der neuen gefoderten ergänzt, und fügt zuletzt noch allen diesen Verbindungen das Element, als eine besondre Form, zu, dessen Zahl für sich eben die Summe ausmacht. In Zeichen; wenn $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots \overset{r}{a} \ldots$ gegebene Elemente; ${}^{r}V, {}^{r-1}V, \ldots {}^{2}V, {}^{1}V$, Inbegriffe aller möglichen Variationsformen zur Summe $r, r-1, \ldots 2, 1$, bedeuten so ist

$${}^{r}V = \overset{1}{a}\,{}^{r-1}V + \overset{2}{a}\,{}^{r-2}V \ldots + \overset{r-2}{a}\,{}^{2}V + \overset{r-1}{a}\,{}^{1}V + \overset{r}{a}$$

Offenbar aber stimmt diese Regel der Recursion so unbedingt mit der unter den Coefficienten unsres Quotienten

$$\overset{r}{A} = \overset{1}{a}\overset{r-1}{A} + \overset{2}{a}\overset{r-2}{A} \ldots + \overset{r-2}{a}\overset{2}{A} + \overset{r-1}{a}\overset{1}{A} + \overset{r}{a},$$

daß sich die Behauptung von selbst rechtfertigt: die Coefficienten des Quotienten sind nichts anders als Variationsfor-

men aus den gegebenen Elementen, zu der Summe gehörig, welche die Zahl des jedesmaligen Coefficienten selbst ausdrückt.

Sollen also für den Quotienten $\frac{1}{1 - \overset{1}{a}x - \overset{2}{a}x^2 \,..\, - \overset{n}{a}x^n}$. welcher eine, nach Potenzen der nehmlichen Hauptgröße, genau wie der Divisor, fortschreitende Form $1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 \,..\, + \overset{n}{A}x^n \,..$ seyn wird, die Coefficienten gefunden werden, so nehme man die Coefficienten des Divisors, in ihrer natürlichen Ordnung, aber mit umgekehrten Zeichen, als Elemente, und bilde aus ihnen Variationsformen zu bestimmten Summen, ohne Rücksicht auf Classen-Unterschiede. Jeder Inbegriff solcher Formen, welcher einer gewissen Summe gehört, die einzelnen Formen als Producte gedacht und durch Addition verbunden, gibt einen Coefficienten für den Quotienten; die Summe, für welche er berechnet war, stellt den Grad der Potenz von der Hauptgröße vor, womit er sich als Factor verbinden wird. In Zeichen:

$$\frac{1}{1 - \overset{1}{a}x - \overset{2}{a}x^2 - \overset{n}{a}x^n} = 1 + {}^1Vx^1 + {}^2Vx^2 \,..\, {}^nVx^n \,..$$

wenn sich das Zeichen V auf die Elemente $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, .\, \overset{n}{a}$. bezieht.

Es ist offenbar in diesem Ausdrucke noch eine Abkürzung möglich. Die Variationsformen werden alle aus einer einzigen Reihe von Elementen, $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, .\, \overset{n}{a}$, . gebildet. Sie sollen, wenn man sie realisirt, als Producte gedacht werden. Alle Producte, die sich bloß

durch abweichende Ordnung der nemlichen Factoren von einander unterscheiden, gelten gleich, und werden nur zusammengezählt. Man braucht also bloß diejenigen Variationsformen, welche durch verschiedenen Inhalt sich als verschiedene zeigen, zu entwickeln, und, statt jede von ihnen zu permutiren, bey jeder zu bemerken, wie oft sie wieder erscheinen würde, wenn man alle möglichen Aenderungen der Folge unter ihren Elementen eintreten lassen wollte. Das heißt kürzer: man erzeuge aus den gegebenen Elementen, als unbedingt wiederholbar gedacht, alle möglichen Combinationsformen, welche, ohne Rücksicht auf Classen-Unterschied, zu der nemlichen bestimmten Summe gehören, und füge, diese Formen aus den Elementen realisirend, jeder ihre eigne Versetzungszahl bey; dadurch erhält man den Coefficienten des Quotienten, welcher einer Potenz der Hauptgröße, von dem Grade, welchen jene bestimmte Summe bezeichnet, zugehört. In Zeichen:

$$\frac{1}{1-\overset{1}{a}x^1-\overset{2}{a}x^2\ldots-\overset{n}{a}x^n} = +p\,{}^1Cx^1+p\,{}^2Cx^2\ldots$$

$+p\,{}^nCx^n\ldots$ wobey sich das Zeichen C auf die umgekehrten Coefficienten des Divisors $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots \overset{n}{a}$, in ihrer natürlichen Ordnung bezieht *f*).

---

f) Sollte z. E. von dem Quotienten aus $\frac{1}{1-2x-5x^2-3x^3-4x^4}$ das 4te Glied berechnet werden, so hätte man, vorausgesetzt, daß die Elemente 1, 2, 3, 4 bedeuteten 2, 5, 3, 4 $p\,{}^4Cx^4$ zu berechnen.

Nachdem auf diese Weise das independente Gesetz für die Bildung des Quotienten völlig zur Deutlichkeit erhoben ist, kann auch von dem Reste, welcher jedesmal, wenn man den Quotienten bis zu einem bestimmten Grade entwickelt hat, und alsdann abbricht, zum Vorschein kommen wird, Rechenschaft gegeben werden, und es muß geschehn, weil eine vollständige Kenntniß der Operation ihn so gut wie den Quotienten zu begreifen hat. Seine Bestimmung ist leicht, aber sie setzt die des Quotienten zum Voraus. Der Rest ist der Unterschied zwischen dem Dividend, und dem Producte aus Divisor und Quotienten. Nun aber ist dieses Product bis zu dem Grade, zu welchem der Quotient aufsteigt, mit dem Dividend identisch; man braucht also nur die Glieder desselben, welche über diesen Grad hinausgehn, zu berechnen, und, weil der Dividend 1 ist, mit umgekehrtem Zeichen zu nehmen, um den gesuchten Rest zu erhalten. Die nähere Bestimmung des Rests kommt also auf die Multiplication zweyer schon bekannten Formen an. Sie sind

der Divisor $1 - \overset{1}{a}x^1 - \overset{2}{a}x^2 \ldots - \overset{n}{a}x^n \ldots$

der Quotient $1 + p^1C + p^2Cx^2 \ldots + p^nCx^n$

Nun giebt p^4C folgende Formen

	realisirt
4	4
2. 13	12
22	25
3. 112	60
1111	16
	117

Es wäre also das verlangte 4te Glied $117x^4$

wobey nur die Bemerkung festgehalten werden muß, daß der eine Factor, der Divisor, im Allgemeinen als unbestimmt fortlaufend gedacht wird, während der andre als abbrechend mit einem Gliede von beliebig gewähltem, bestimmten Range, angesehn werden soll.

Die Bildung eines solchen Products geschieht nach den bekannten Regeln der Multiplication, und jedes beliebige Glied desselben kann erhalten werden, indem man alle Coefficienten des einen Factors, hier am bequemsten des abbrechenden, von dem höchsten an, setzt, um mit jedem derselben einen Coefficienten des andern Factors durch Multiplication zu verbinden, und zwar denjenigen, dessen Zahl, mit der des ersten Coefficienten vereinigt, den Grad der Potenz hervorbringt, welche in dem gefoderten Gliede von der Hauptgröße vorkommen soll. In Zeichen: das r^{te} würkliche Glied des Restes, bey einem Quotienten, der schon bis auf den n^{ten} Grad entwickelt ist, welcher folglich die Potenz x^{n+r} enthalten wird, hat zum Coefficienten:

$$-(p^n C \overset{r}{a} + p^{n-1} C.\overset{r+1}{a} .. + p^2 C.\overset{n+r-2}{a} + p^1 C\overset{n+r-1}{a} + \;.\overset{n+r}{a}).$$

Dabey versteht es sich von selbst, daß alle die Producte wegfallen, in welchen Coefficienten des Divisors, höher an Zahl, als die würklich vorhandenen sind, gefodert werden sollten. Uebrigens setzt die Berechnung des Restes eigentlich voraus, daß man die Glieder des Quotienten, bey welchem er nachgeblieben ist, schon kenne, und es ließe sich, wenn, wie vorhin

der Quotient durch $1 + \overset{1}{A} x^1 + \overset{2}{A} x^2 \ldots + \overset{n}{A} x^n$ angedeutet würde, der Ausdruck für den Rest auch so geben, daß sein r^tes Glied $- (\overset{n}{A} a^{r} + \overset{n-1}{A} a^{r+1} + \ldots \overset{2}{A} a^{n+r-2} + \overset{1}{A} a^{n+r-1} + a^{n+r}) x$ wäre. Man wird unfehlbar die letzte Form wählen, sobald man eine vollständige Berechnung des ganzen Restes machen will g).

g) Wir haben in dem vorhergehenden Beyspiele den Quotienten aus $\frac{1}{1 - 2x - 5x^2 - 3x^3 - 4x^4}$ $= 1 + 2x + 9x^2 + 31x^3 + 117x^4 + \ldots$ gefunden. Wollte man ihn mit dem 4ten Gliede abbrechen, und nun nach dem Reste fragen, so wäre derselbe ein Product der beyden Formen

$$\frac{1 + 2x + 9x^2 + 31x^3 + 117x^4}{1 - 2x - 5x^2 - 3x^3 - 4x^4}$$

mit Weglassung aller Glieder, die unter der fünften Potenz blieben, berechnet, und mit umgekehrten Zeichen geschrieben. Die gemeine Multiplication ist das bequemste Mittel diesen Rest vollständig zu erhalten, sie gibt, wenn man allmälig mit jedem Gliede des Multiplicators, in alle diejenigen des Multiplicands, welche Producte vom 5ten und höheren Rängen hervorbringen können, multiplicirt, und die Zeichen umkehrt

$$\begin{array}{r|r|r|r}
234 & x^5 & & \\
155 & +585 & x^6 & \\
27 & 93 & +351 & x^7 \quad\quad \\
8 & 36 & 124 & +468\,x^8 \\
\hline
424\,x^5 & +714\,x^6 & +475\,x^7 & +468\,x^8
\end{array}$$

Einzelne Glieder des Rests zu berechnen, mögte selten oder nie gefodert werden; es kommt auf gemeine Multiplication dabey einzig an.

Es ließen sich auch noch Untersuchungen über die Recursion unter den Resten anstellen, die bey successiver Erweiterung der Form des Quotienten allmälig entstehn. Sie führen auf das gemeine Divisionsverfahren zurück, und bedürfen eben deswegen keiner weiteren Entwicklung.

Die Zahl der Glieder, welche der Rest enthalten kann, hängt lediglich von der Zahl der Glieder ab, welche im Divisor nach dem anfänglichen vorkommen. Das Product aus dem Divisor in den Quotienten hat zwar soviele Glieder nach dem anfänglichen, als die Summe ihrer Rangzahlen andeutet. Aber alle diejenigen von den ersten Gliedern dieses Products fallen hier von selbst weg, welche bis zu demselben Range wie der eine Factor, (der Quotient), aufsteigen. Es können also nur soviele übrig bleiben, als der Rang des andern Factors (des Divisors) andeutet. Das heißt, jeder Rest wird soviel Glieder haben, als der Divisor deren nach seinem anfänglichen enthält.

Alles bisher in Rücksicht auf die Regeln des Dividirens Entwickelte bezieht sich zwar nur auf den einfachen Fall eines Dividends, welcher lediglich 1 ist, indessen gibt es von ihm aus einen sehr leichten Uebergang zu der allgemeineren Annahme, wobey der Dividend gleichfalls als eine unbestimmt nach Potenzen der nehmlichen Hauptgröße, auf gleiche Weise wie der Divisor, fortschreitende Form gedacht werden soll, wo also, in Zeichen ausgedrückt der

Quotient: $\frac{b + \overset{1}{b}x^1 + \overset{2}{b}x^2 \ldots + \overset{p}{b}x^p \ldots}{1 - \overset{1}{a}x^1 - \overset{2}{a}x^2 \ldots - \overset{m}{a}x^m \ldots}$ gefunden werden muß.

Das recurrirende Verfahren erleidet keine bedeutende Veränderung. Man fingirt den Quotienten wie vorher: $A + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \ldots \overset{n}{A}x^n \ldots$, um das Product aus ihm in den Divisor bis zu dem Grade, welchen der Quotient erreicht hat, dem Dividend gleichzusetzen. So bleibt alles, wie vorhin, nur den einen Umstand abgerechnet, daß die einzelnen Glieder des Products, solange gleichhohe im Dividend vorhanden sind, nicht $= 0$, sondern eben jenen im Dividend, die mit ihnen vom nehmlichen Range sind gleichgesetzt werden müssen. Wenn also vorher der allgemeine Ausdruck für jeden Coefficienten des Products, dessen Rang den des Quotienten nicht überstieg: $\overset{r}{A} - \overset{1}{a}\overset{r-1}{A} - \overset{2}{a}\overset{r-2}{A} \ldots - \overset{r}{a}A = 0$ war, so wird jetzt eben derselbe $= \overset{r}{b}$ seyn; die daraus fließende Regel für die Art, wie jeder folgende Coefficient in der Form des Quotienten, aus allen vorhergehenden berechnet werden kann, wird, nach vollzogener einfacher Transposition seyn: $\overset{r}{A} = \overset{1}{a}\overset{r-1}{A} + \overset{2}{a}\overset{r-2}{A} \ldots + \overset{r}{a}A + \overset{r}{b}$. Dadurch erhält also die oben ausgesprochene mechanische Regel für die Berechnung der successiven Coefficienten im Quotienten nur noch den Zusatz: man addire zu den vorhin bezeichneten Producten aus den schon gefundenen

Coefficienten in die des Divisors, welche den Werth des nächsthöheren Coefficienten geben sollen, am Ende noch den eben so hohen Coefficienten aus dem Dividend solange ein solcher in ihm vorhanden ist. Der Mechanismus der Berechnung wird dadurch weder geändert noch erschwert *h*).

Was hingegen den independenten Ausdruck des Quotienten betrifft, so hat er allerdings eine wesentliche Aenderung zu erleiden. Denn das Gesetz der Recursion, welches nur unter den Coefficienten des Quotienten stattfindet, hat aufgehört so einfach zu seyn, daß es auf eine ähnliche, wie sie bey Formen Inbe-

---

h) Will man hier ein ähnliches mechanisches Verfahren, wie bey der vorigen Recursion gebrauchen, so lasse man Alles wie es dort war, und schreibe nur die successiven Coefficienten des Dividends an die Spitze der successiven Product-Columnen, die allmälig summirt werden sollen.

Es sey z. E. $\frac{3+2x+4x^2+6x^3+5x^4}{1-4x-3x^2-7x^3-2x^4}$ zu berechnen.

Nach dem ersten Schema geschieht dies auf folgende Art

2, 7 3, 4,	3	3
7, 3, 4,	14	2, 12
3 4,	69	4, 56, 9
4,	345	6, 276, 42, 21
	1696	5, 1380, 207, 98, 6

Es sind also die 5 ersten Glieder des Quotienten

$$3+14x^1+69x^2+345x^3+1696x^4 \ldots$$

Man kann auch bey diesem Verfahren die vorhin erwähnte Abkürzung und Aenderung anbringen.

griffen ursprünglicher combinatorischer Operationen vorkommt, zurückgebracht werden könnte. Offenbar aber wird es leicht seyn, aus dem ersten Falle, wo der Dividend 1 war, und der für ihn bekannten independenten Bildung aller Coefficienten des Quotienten, Etwas ähnliches für den gegenwärtigen zu leisten. Denn es ist erlaubt, zu setzen, der vorige Dividend, 1, solle mit der Form multiplicirt werden, welche den gegenwärtigen Dividend darstellt, wo also auch der vorige Quotient mit eben dieser Form wird multiplicirt werden müssen, wenn man den neuen verlangten, erhalten will. In Zeichen: wenn

$$\frac{1}{1 - \overset{1}{a}x - \overset{2}{a}x^2 \ldots - \overset{m}{a}x^m \ldots} = 1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \ldots \overset{n}{A}x^n \ldots$$

war, so wird

$$\frac{b + \overset{1}{b}x^1 + \overset{2}{b}x^2 + \ldots \overset{p}{b}x^p \ldots}{1 - \overset{1}{a}x - \overset{2}{a}x^2 \ldots - \overset{m}{a}x^m \ldots} = (b + \overset{1}{b}x^1 + \overset{2}{b}x^2 . + \overset{p}{b}x^p .).$$

$$\left(\frac{1}{1 - \overset{1}{a}x^1 - \overset{2}{a}x^2 \ldots - \overset{m}{a}x^m \ldots}\right) = (b + \overset{1}{b}x^1 + \overset{2}{b}x^2 . + \overset{p}{b}x^p)$$

$$(1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \ldots \overset{n}{A}x^n . .)$$

Es ist also, um den Quotienten der gegenwärtigen Division zu erhalten, nur noch die Multiplication des im ersten Falle gefundenen Quotienten mit der Form des Dividends zu vollziehn. Die daraus hervorgehende Form wird nach demselben Gesetze, wie der Dividend, in Absicht auf die in ihren einzelnen Gliedern enthaltenen Potenzen der Hauptgröße, gebildet

seyn. Ihre Coefficienten erzeugen sich der bekannten Regel gemäß, welche für Producte von zwey gleichmäßig fortschreitenden Formen im Vorhergehenden entwickelt sind. Dem gemäß wird sogleich das Resultat der Untersuchung auf folgende Art ausgesprochen werden können.

Der Quotient $\dfrac{b + \overset{1}{b}x + \overset{2}{b}x^2 .. + \overset{p}{b}x^p ..}{1 - \overset{1}{a}x^1 - \overset{2}{a}x^2 .. - \overset{m}{a}x^m ..}$ ist eine Form von der nehmlichen Bildung wie Dividend und Divisor; sein Anfangsglied ist dem des Dividends identisch, $= b$; um zu irgend einem folgenden Gliede, wofür Zahl des Gliedes und Grad der darin von der Hauptgröße vorkommenden Potenz, immer zusammenfallen werden, den Coefficienten zu erhalten, bilde man alle Combinationsformen aus den folgenden Coefficienten des Divisors, zu den successiven Summen, die bis zur Zahl des gefoderten Gliedes, diese mit eingeschlossen möglich sind, und multiplicire jede mit ihrer Permutationszahl. Man setze allen den Combinationsformen, die zu der nehmlichen Summe gehören, den Coefficienten des Dividends als Factor bey, dessen Zahl mit derjenigen dieser Summe, die Zahl des verlangten Gliedes hervorbringt, zuletzt noch den Coefficienten des Divisors, dessen Zahl schon für sich ebensoviel beträgt, einzeln, und vereinige alle diese Producte zu demselben Aggregat. In Zeichen: das r^{te} Glied des vorhin angedeuteten Quotienten ist

$$x^r(p^r C b + p^{r-1} C \overset{1}{b} + p^{r-2} C \overset{2}{b} .. + p^2 C \overset{r-2}{b} + p^1 C \overset{r-1}{b} + 1.\overset{r}{b})$$

wenn sich das Zeichen C auf die Coefficienten des Divisors, $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}$.. als Elemente bezieht. Diese Regel ist offenbar bey würklicher Berechnung nur dann als brauchbar zu empfehlen, wenn ein einzelnes Glied des Quotienten, herausgerissen aus der Reihe der übrigen, berechnet werden soll. Sobald hingegen die successiven Glieder des Quotienten, vom Anfang an, bis zu einer beliebigen Weite gefodert werden sollten, erscheint das recurrirende Verfahren als ohne Vergleich bequemer und vorzüglicher *i*). Was den

i) Sollte von dem Quotienten $\frac{3+2x+4x^2+6x^3+5x^4}{1-4x-3x^2-7x^3-2x^4}$ das vierte Glied nach dem anfänglichen berechnet werden, so wäre es der Formel gemäß

$x^4(p^4C.3+p^3C.2+p^2C.4+p^1C.6+5)$

das Zeichen C auf die Elemente $\overset{1}{4}, \overset{2}{3}, \overset{3}{7}, \overset{4}{2}$ bezogen. Nun ist

	realisirt	multipl. mit	+5
$p^1C = 1$	4	6	24
$p^2C = 2$	3		
$= 11$	16		
	19	4	76
$p^3C = 3$	7		
2) 12	24		
111	64		
	95	2	190
p^4C 4	2		
2) 13	56		
22	9		
3) 112	144		
1111	256		
	467	3	1401
			1696

Also das vierte Glied des Quotienten $= 1696x$

Rest der zuletzt betrachteten Division betrifft, so kann seine Bestimmung unmittelbar wie die des vorhergehenden gemacht werden: den Quotienten dürfen wir als schon gefunden voraussetzen. Das Product aus dem Quotienten in den Divisor, abgezogen vom Dividend gibt den Rest, wobey sich von selbst versteht, daß dieser Rest mit einem Gliede anhebt, dessen Rang um eins höher ist, als die schon entwickelte Form des Quotienten. Wir bekommen also hier, wenn wir die Coefficienten des Quotienten als bekannte Größen annehmen wollen, eine Regel für die Berechnung des Restes, die von der vorhergehenden sehr wenig abweicht. Es sey in Zeichen

der Quotient $B + \overset{1}{B}x + \overset{2}{B}x^2 \,..\, \overset{r}{B}x^r \,..$

der Divisor $\underline{1 - \overset{1}{a}x - \overset{2}{a}x^2 \,..- \overset{m}{a}x^m} \,..$

so ist das Product dieser beyden Formen, vom Grade x^{r+1} an, berechnet, und vom Dividend, $b + \overset{1}{b}x^1 + \overset{2}{b}{}^2 \,..\, + \overset{p}{b}x^p \,..$ abgezogen, der gesuchte Rest. Will man also für irgend ein Glied des Restes den Coefficienten erhalten, so setze man die successiven Coefficienten des Quotienten; multiplicire jeden mit dem Coefficienten des Divisors, dessen Zahl mit der seinigen den Grad derjenigen Potenz der Hauptgröße ausmacht, welche in dem verlangten Gliede vorkommen soll; addire endlich die Summe dieser Producte zu dem eben so hohen Coefficienten des Dividends. In Zeichen: des Restes, welchen die vorhin angedeutete Division lassen

wird, vorausgesetzt, daß der Quotient bis zum 1ten Gliede entwickelt seyn, k^{tes} würkliches Glied ist

$$x^{r+k}(\overset{r+k}{B}a + \overset{1\;r+k-1}{B}a + \overset{2\;r+k-2}{B}a \ldots + \overset{r\;k}{B}a + \overset{r+k}{b})$$

Es hängt offenbar von der Zahl von Gliedern ab, die der Divisor enthält, ob die Menge der Producte, welche sich zu einem Coefficienten des Rests vereinigen, mehr oder minder beträchtlich seyn soll, so wie, wenn der Divisor keine ins Unendliche fortschreitende Form ist, ihre Anzahl für jedes höhere Glied des Restes geringer werden muß. In dem letzten Falle wird der Rest überhaupt so viele Glieder verschiedenen Ranges enthalten, als der Divisor Coefficienten nach seinem Anfangsgliede in sich schließt.

Eine recurrirende Regel für den Zusammenhang der Reste, welche bey successiver Entwicklung der einzelnen Glieder des Quotienten entstehn, besonders nachzusuchen, würde überflüssig seyn; da das gemeine Divisionsverfahren es schon in seiner höchsten Vollkommenheit darstellt. Ueberhaupt wird die mindere Wichtigkeit dieser Reste ein kürzeres Verweilen bey ihrer Betrachtung erlauben.

Es könnte scheinen, als wäre die Form, welche bey der letzten Betrachtung dem Divisor gegeben ist, nur particulär, weil wir in seinem Anfangsgliede die Einheit gesetzt haben. Indessen zeigt sich sogleich das Gegentheil durch die Bemerkung, daß sich diese Form auch alsdann, wenn der Divisor im Anfangsgliede einen beliebigen Coefficienten hätte, sehr bald hervor-

bringen ließe. Man braucht nur vorläufig alle Glieder im Dividend und Divisor mit eben diesem Coefficienten zu dividiren; die neuen Formen von beyden werden alsdann unfehlbar unter das angenommene Schema fallen. Daß wir die folgenden Glieder des Divisors negativ gesetzt haben, kann eben so wenig Hinderungen machen; man braucht nur in dem wirklich gegebenen Divisor, statt des in ihm liegenden Coefficienten, die ihnen entgegengesetzten Größen zu nehmen, und es wird erlaubt seyn, alsdann alle Glieder negativ zu setzen.

Die allgemeinste Gestalt, welche sich für Dividend und Divisor annehmen ließe, wäre die, daß die Exponenten der Potenzen in beyden überhaupt nur durch gleiche Unterschiede fortschritten (eine arithmetische Progression von dem nemlichen Exponenten bildeten). Aber es ist leicht diese Aufgabe auf die vorige zurückzuführen.

Es sey, in Zeichen $\dfrac{b x^{\alpha} + \overset{1}{b} x^{\alpha+\delta} + \overset{2}{b} x^{\alpha+2\delta}}{a x^{\beta} + \overset{1}{a} x^{\beta+\delta} + \overset{2}{a} x^{\beta+2\delta}}$

der darin gefoderte Quotient zu suchen. Man dividire erst Dividend und Divisor mit der Potenz der Hauptgröße, welche im Anfangsgliede des Divisors steht, und sondre zugleich im Dividend, aus allen Gliedern, als Factor, die Potenz der nemlichen ab, welche alsdann in dessen Anfangsgliede vorkommt

$$x^{\alpha-\beta}\left(\frac{b + \overset{1}{b} x^{\delta} + \overset{2}{b} x^{2\delta} \ldots}{\alpha + \overset{1}{\alpha} x^{\delta} + \overset{2}{\alpha} x^{2\delta} \ldots}\right)$$

Der abgesonderte Factor hat weiter keinen Einfluß auf

die Entwicklung; nur daß er am Ende hinzugefügt werde. Der angedeutete Quotient hingegen hat die Gestalt, welche in der vorigen einfachen Betrachtung angenommen ist, sobald man, für den Augenblick, $x^\delta = u$ setzen will, wodurch er sich in $\frac{b + \overset{1}{b}u + \overset{2}{b}u^2 .}{a + \overset{1}{a}u + \overset{2}{a}u^2 .}$ verwandelt. Aus ihm entsteht, eine, dem Gesetz ihrer Bildung nach durch das vorhergehende hinlänglich bekannte Form $= B + \overset{1}{B}u + \overset{2}{B}u^2 .. + \overset{r}{B}u^r$, und ein Rest, sobald man diese abbricht, von gleichfalls bekannter Form und Bildung $\overset{1}{R}u^{r+1} + \overset{2}{R}u^{r+2} + .$ Setzt man für u seinen Werth x^δ zurück, und multiplicirt man mit dem abgesonderten Factor $x^{\alpha-\beta}$ das Resultat der anderweitigen Division, so erhält man Quotient und Rest vollständig, deren gänzliche independente Bildung also folgendermaßen geregelt werden kann.

Wenn aus den Formen $\frac{bx^\alpha + \overset{1}{b}x^{\alpha+\delta} + \overset{2}{b}x^{\alpha+2\delta} .}{ax^\beta + \overset{1}{a}x^{\beta+\delta} + \overset{2}{a}x^{\beta+2\delta} .}$ der Quotient gefodert werden sollte, so ist derselbe eine Form, in welcher die Exponenten nach der nehmlichen Progression fortgehn, so daß der des Anfangsgliedes die Differenz der gleichnamigen im Dividend und Divisor ist. In Zeichen: das Anfangsglied enthält $x^{\alpha-\beta}$; das r^{te} nach ihm $x^{\alpha-\beta+r\delta}$. Um die Coefficienten des Quotienten zu finden, dividire man zuvor alle in den beyden gegebenen Formen

enthaltene durch den anfänglichen des Divisors. Die dadurch erhaltenen folgenden Coefficienten des Divisors setze man mit umgekehrten Zeichen, als Elemente, $\frac{-\overset{1}{a}}{a}$, $\frac{-\overset{2}{a}}{a}$, $\frac{-\overset{3}{a}}{a}$, . . und bilde aus ihnen Inbegriffe von Combinationsformen, jede einzelne mit ihrer Permutationszahl als Factor versehn, so wie auch die Elemente der einzelnen Formen als Factoren auf einander bezogen, die Producte aber als Theile verbunden werden müssen. Man sehe jeden Inbegriff aller Combinationsformen, die der nehmlichen Summe angehören, als eine geschlossene Größe an, und entwickle deren soviele, als man Glieder für den Quotienten nach dem anfänglichen verlangt. Man füge jedem solchen Inbegriff als Factor den Coefficienten des veränderten Dividends bey, dessen Zahl mit der des Inbegriffs (oder, was einerley ist, der Summe wozu er gehört) soviel ausmacht als die Zahl des Gliedes im Quotienten, wozu der Coefficient verlangt wurde, und setze als besondern Theil, den Coefficienten des Dividends mit in die Summe, dessen Zahl schon für sich eben die Höhe hat. In Zeichen: das r^{te} Glied des oben gefoderten Quotienten ist

$$x^{\alpha-\beta+r\delta}\left(\frac{\overset{r}{b}}{a}+\frac{\overset{r-1}{b}}{a}p^{1}C+\frac{\overset{r-2}{b}}{a}p^{2}C.+\frac{\overset{2}{b}}{a}p^{r-2}C+\frac{\overset{1}{b}}{a}p^{r-1}C+\frac{b}{a}p^{r}C\right)$$

wobey C sich auf die Elemente $-\frac{\overset{1}{a}}{a}$, $-\frac{\overset{2}{a}}{a}$, $-\frac{\overset{3}{a}}{a}$, bezieht. Es versteht sich von selbst, daß das An-

fangsglied des Quotienten mit dem des Dividends $\frac{b}{a}$ identisch ist.

Was den Rest einer solchen Division betrifft, so setzt er den Quotienten als entwickelt voraus, und ist, falls derselbe bis zum Gliede des r^{ten} Ranges berechnet, angenommen wird, eine Form, die mit dem nächst-höheren Range anhebt, in Zeichen, mit $a^{\alpha-\beta+(r+1)\delta}$ und durch dieselbe Progression der Exponenten fortläuft. Für irgend ein Glied in ihm findet sich der Coefficient, wenn man jeden des Quotienten mit dem des Divisors, dessen Index mit dem seinigen die Zahl des gefoderten Gliedes ausmacht, multiplicirt, die Summe dieser Producte berechnet, und von dem eben so hohen Coefficienten des Dividends abzieht. In Zeichen, das k^{te} Glied des Restes, falls der schon gefundene Quotient $= Bx^{\alpha-\beta} + Bx^{\alpha-\beta+\delta} + ..$ seyn soll, ist

$$x^{\alpha-\beta+(r+k)\delta}\left(\overset{r+k}{b} - \left|\overset{r}{B}\overset{k}{a} + \overset{r-1}{B}\overset{k+1}{a} \dots + B\overset{r+k}{a}\right|\right)$$

Was endlich bey dieser allgemeinen Form für die Aufgabe der Division das recurrirende Verfahren betrifft, vermöge dessen man jeden folgenden Coefficienten des Quotienten aus den vorhergehenden berechnen kann, so erscheint es eben so einfach, wie in den vorhergehenden Fällen. Wenn man die Quotienten als schon gefunden annimmt,

$$\frac{bx^{\alpha} + \overset{1}{b}x^{\alpha+\delta} + \overset{2}{b}x^{\alpha+2\delta}}{ax^{\beta} + \overset{1}{a}x^{\beta+\delta} + \overset{2}{a}x^{\beta+2\delta}} .. = Bx^{\alpha-\beta} + \overset{1}{B}x^{\alpha-\beta+\delta} ..$$

$$\overset{r}{B}x^{\alpha-\beta+r\delta} \dots$$

alsdann das Product aus dem Divisor und Quotienten, bis zu dem Range des höchsten Gliedes in dem letzteren berechnet, und vom Dividend abgezogen, = o setzt, so ist das allgemeine Schema der daraus hervorgehenden Gleichungen:

$\overset{r}{b} - (\overset{r}{B}a + \overset{r-1}{B}\overset{1}{a} + \ldots \overset{1}{B}\overset{r-1}{a} + B\overset{r}{a}) = 0$, woraus, mit einer leichten Verwandlung folgt:

$$\overset{r}{B} = \frac{\overset{r}{b} - |\overset{r-1}{B}\overset{1}{a} + \overset{r-2}{B}\overset{2}{a} \ldots \overset{1}{B}\overset{r-1}{a} + B\overset{r}{a}|}{a}$$

Man berechne also, um einen Coefficienten von beliebiger Zahl für den Quotienten zu erhalten, alle Producte aus den nächstvorhergehenden Coefficienten eben desselben, in die des Divisors, deren Index mit dem ihrigen die Zahl des gesuchten Coefficienten ausmacht. Den Inbegriff dieser Producte ziehe man von dem eben so hohen Coefficienten des Dividends ab, und dividire den Rest durch den Anfangs-Coefficienten des Divisors. Diese Regel gilt unbedingt, selbst für den anfänglichen Coefficienten des Quotienten, für welchen sie $B = \frac{b}{a}$, seinen richtigen Werth darbietet. Hätte man, wie es bey bestimmten Formen allemal geschehn kann, durch vorläufige Division den Anfangs-Coefficienten des Divisors in die Einheit verwandelt, so würde sich die Formel der Recursion durch das Wegfallen des Divisors in ihr vereinfachen, und, wenn man vorläufig die Zeichen aller folgenden Glieder im Divisor ändern wollte, ganz auf die vorhergehende

zurückkommen, welches beydes für jeden bestimmten Fall anzurathen seyn mögte, weil sich der Ausdruck der Regel selbst dadurch vereinfacht.

Eine recurrirende Regel für die Reste zu suchen, würde in überflüssige Weitläuftigkeiten führen.

Es verdient noch besonders bemerkt zu werden, daß, sobald der Dividend und Divisor beyde aus einer bestimmten Zahl gegebener Glieder bestehn, der Quotient in zwey ganz verschiedenen Gestalten dargestellt werden kann. Man ordne beyde steigend, wo also die Differenz unter den Exponenten ihrer successiven Glieder, das δ der allgemeinen Formel positiv seyn wird, und der Quotient wird gleichfalls eine steigende Form, mit derselben Progression der Exponenten werden. Ordnet man hingegen, wie es eben so gut gestattet ist, Dividend und Divisor beyde fallend, wobey also die Differenz ihrer successiven Exponenten, δ, eine negative Zahl werden muß, so wird der Quotient auch eine fallende Form ähnlicher Art wie sie. Die Berechnung der Coefficienten geschieht in beyden Fällen nach der nemlichen combinatorischen Regel; es braucht wohl kaum erinnert zu werden, daß sie das eine Mal durchaus andere Resultate geben muß, als das andre Mal, weil sich die Bedeutung des combinatorischen Index gänzlich verändert, je nachdem man einen steigenden, oder einen fallenden Quotienten haben will.

Sollten übrigens Sprünge und Lücken in den Formen des Dividends und Divisors vorhanden seyn,

so würde man vergeblich in Beziehung auf sie eine Abkürzung des Verfahrens suchen.

Die Aehnlichkeit der Methode mag es rechtfertigen, daß an dieser Stelle der Satz eingeschaltet wird, welcher mit Recht für das Fundament der ganzen höheren Algebra gehalten zu werden pflegt. Sein Gegenstand ist die Berechnung der Summe, welche aus beliebig gewählten **gleichhohen** Potenzen aller Wurzeln einer willkührlichen Gleichung entspringt, bloß aus den Coefficienten, welche die Form dieser Gleichung enthält, ohne daß es nöthig wäre, die Wurzeln derselben einzeln zu kennen. Er beruht auf combinatorischer Betrachtung, und führt auf eine Recursion, die mit der bey der Bildung eines Quotienten statt findenden fast ganz zusammenfällt.

Es mögen gewisse Elemente (a, b, c, d..) vorhanden seyn, die unwiederholbar, zur Bildung von Combinationsclassen gebraucht werden sollen. Man nehme beliebig eine solche Classe, $\overset{m}{C}$, und betrachte die Formen, welche sie enthält in Beziehung auf ein gewisses Element, z. E. a. Es wird Formen in ihr geben, die dasselbe in sich enthalten; andre, in denen es nicht vorkommt (die Formen, welche ein gewisses Element nicht enthalten, sollen dadurch, daß das Zeichen desselben eingeklammert unter das der Classe gesetzt wird, angedeutet werden, wie z. E. die zuletzt genannten durch $\underset{(a)}{\overset{m}{C}}$)

Den bekannten Regeln des Combinirens zu Folge erhält man alle Formen einer gewissen Classe, falls man eins der Elemente abgesondert von den übrigen betrachten will, indem man erstlich alle Formen der nächst niedrigeren Classe, aus den übrigen Elementen bildet, und ihnen jenes abgesonderte Element vorsetzt; indem man alsdann zweytens, aus eben jenen übrigen Elementen alle Formen, die der gefoderten Classe selbst angehören, erzeugt, und der ersten hinzufügt. In Zeichen $\overset{m}{C} = a\underset{(a)}{\overset{m-1}{C}} + \underset{(a)}{\overset{m}{C}}$. Dieser zweyte Inbegriff aber ist es gerade selbst, welchem man das obige abgesonderte Element vorsetzen müßte, wenn man für die nächsthöhere Combinationsclasse eine ähnliche Sonderung der Formen vornehmen wollte, $\overset{m+1}{C} = a\underset{(a)}{\overset{m}{C}} + \underset{(a)}{\overset{m+1}{C}}$. Man gelangt also zu folgendem allgemeinen Satze durch fortgesetzten Gebrauch der eben gemachten Bemerkung.

Es mögen aus beliebigen nicht wiederholbaren Elementen, (a, b, c, d . .) successive Combinationsclassen, $\overset{1}{C}, \overset{2}{C}, \overset{3}{C} \ldots$ gebildet seyn. Man wähle eins dieser Elemente, und setze es, beliebig wiederholt, der ersten Classe; eben so auch den successiv folgenden, nur jeder nächsthöheren einmal weniger wiederholt, bey. Man verbinde diese successiven Classen mit abwechselnden Zeichen

$$a^r\overset{1}{C} - a^{r-1}\overset{2}{C} + a^{r-2}\overset{3}{C} \ldots (-1)^k a^{r-k}\overset{k+1}{C}$$

Alsdann wird von dieser ganzen Zusammenstellung, wenn man auf die vorhin angegebene Weise jede Classe

in Beziehung auf das vorgesetzte Element in zwey Gattungen von Formen zerlegt, nichts weiter herauskommen und übrig bleiben, als die erste Gattung aus dem ersten Gliede, $\overset{r}{a} . a = a^{r+1}$, und die zweyte Gattung aus dem lezten $(-1)^k a^{r-k} . \overset{k+1}{\underset{(a)}{C}}$, so daß, dem gemäß

$$a^r\overset{1}{C} - a^{r-1}\overset{2}{C} .. (-1)^k a^{r-k}\overset{r+1}{C} = a^{r+1} + (-1)^k a^{r-k}\overset{k+1}{\underset{(a)}{C}}.$$

Nun gilt offenbar für jedes der Elemente, woraus sich die Combinationen gebildet haben, die nemliche Beziehung. Man setze also jedes von ihnen allmälig für a an die Stelle, und man wird Formen, wie die eben dargestellte, erhalten. Die Coefficienten dieser Formen auf der ersten Seite der Gleichung werden immer die nemlichen bleiben, während eine andre Hauptgröße, das jedesmal gewählte Element, sich zu ihnen gesellt. Bloß der Coefficient des zweyten Gliedes auf der andern Seite der Gleichung $\overset{k}{\underset{(a)}{C}}$ muß sich gleichfalls ändern, so wie ein andres Element unter die nemliche Beziehung gestellt werden sollte. Es wird also bey der Summirung der Gleichungen, die für jedes Element, wie für das erste, entstehn, nur eine Schwierigkeit bey der Summirung der in ihnen enthaltenen letzten Glieder, $a^{r-k}\overset{k+1}{\underset{(a)}{C}} + b^{r-k}\overset{k+1}{\underset{(b)}{C}} + c^{r-k}\overset{k+1}{\underset{(c)}{C}} + ..$ entspringen, die aber in zwey Fällen leicht gehoben werden kann.

Es sey zuerst die Menge der Elemente, woraus sich die Combinationen bilden, mithin die Zahl der Classen, nicht geringer, als die des höchsten der vorgesetzten Vielfachen, r. Alsdann wird man die Reihe fortsetzen können, bis sich r−k in 1 verwandelt, und also jenes letzte Glied $a\overset{r}{\underset{(a)}{C}}$ wird. Jetzt deutet es alle Formen der nächsthöheren $r+1^{ten}$ Classe an, welche das Element a enthalten. Die gefoderte Summe aller letzten Glieder aus den Gleichungen, die für jedes Element, wie für das erste entstehn,

$$a\overset{r}{\underset{(a)}{C}} + b\overset{r}{\underset{(b)}{C}} + c\overset{r}{\underset{(c)}{C}} + \ldots$$

verlangt also, daß man alle Formen dieser nächsthöheren Classe, die das erste Element enthalten, wegen desselben, alsdann alle die das zweyte Element in sich führen, wegen dieses zweyten Elements, und so fort alle Formen, die irgend eines der vorhandenen Elemente in sich schließen, wegen ebendesselben, setzen, und den Inbegriff dieser Formen bilden soll. So kommt jede Form, die dieser Classe gehört, wegen jedes in ihr liegenden Elements, einmal besonders gesetzt vor; man erhält also jede Form dieser Classe so oft, als sie Elemente in sich hat, oder man bekommt die Classe selbst, mit ihrem eignen Grade multiplicirt

$$a\overset{r}{\underset{(a)}{C}} + b\overset{r}{\underset{(b)}{C}} + c\overset{r}{\underset{(c)}{C}} \ldots = (r+1)\overset{r+1}{C}$$

In diesem Falle also ist die Summation aller oben angeführten Gleichungen leicht, und gibt, wenn der

Kürze wegen $a^n + b^n + c^n + \ldots$ fortgesetzt bis zum letzten der vorhandenen Elemente, durch $\overset{n}{A}$ angedeutet wird, die Formel:

$$\overset{r}{A}\overset{1}{C} - \overset{r-1}{A}\overset{2}{C} + \overset{r-2}{A}\overset{3}{C} \ldots (-1)^{r-1}\overset{1}{A}\overset{r}{C} = \overset{r+1}{A} + (-1)^{r-1}(r+1)\overset{r+1}{C}$$

in welcher bloß noch das allerletzte Glied auf die andre Seite der Gleichung, mit gehörig geändertem Zeichen, herübergesetzt zu werden braucht, um eine völlig geordnete Recursionsformel zwischen den durch A ausgedrückten gesuchten Größen, und den gegebenen Combinationsclassen zu erhalten:

$$\overset{r}{A}\overset{1}{C} - \overset{r-1}{A}\overset{2}{C} + \overset{r-2}{A}\overset{3}{C} \ldots + (-1)^{r-1}\overset{1}{A}\overset{r}{C} + (-1)^{r}(r+1)\overset{r+1}{C} = \overset{r+1}{A}.$$

Es sey zweytens r größer, als die Zahl der vorhandenen Combinationsclassen, so daß also die $k+1^{te}$ als die höchste mögliche angesehn, und nur bis zu ihr die obige Reihe fortgesetzt werden kann. Alsdann ist offenbar, weil nur $k+1$ Elemente vorhanden seyn sollen, $\overset{k+1}{C} = 0$, [a] es fällt also das letzte Glied auf der andern Seite der Gleichung ganz weg, und die bey der Summirung aller Gleichungen entstehende Formel wird:

$$\overset{r}{A}\overset{1}{C} - \overset{r-1}{A}\overset{2}{C} + \overset{r-2}{A}\overset{3}{C} \ldots + (-1)^{k}\overset{r-k}{A}\overset{k+1}{C} = \overset{r+1}{A}$$

Sie erscheint noch einfacher als die vorhergehende, ist aber im Grunde mit ihr identisch, und ein specieller Fall von ihr, denn wenn man derselben auch für den Fall, wo die Zahl der vorhandenen Classen nicht bis zu r, sondern zu einer kleineren Zahl $k+1$ aufstiege,

Gültigkeit zugestehn wollte, so würden alle Glieder in ihr, von $\overset{k}{A}\overset{k+1}{C}$ weiter fort, indem sie als Coefficienten noch höhere Combinationsclassen, $\overset{k+2}{C}$ und so fort, bis $\overset{r}{C}$, foderten, da jede derselben o ist, von selbst wegfallen, und so dasselbe Resultat wie aus der zweyten Formel entspringen. Es kann also für jeden Werth von r, ohne Rücksicht auf die Anzahl aller vorhandnen successiven Combinationsclassen, die erste Recursionsformel als unbedingt gültig gebraucht werden.

Die Anwendung dieses combinatorischen Satzes auf die Theorie der Gleichungen ist leicht. Hat man die Form einer beliebigen Gleichung, gehörig fallend geordnet, so stellen die Coefficienten dieser Form in ihrer Ordnung, nur die von ungerader Zahl mit umgekehrten Zeichen genommen, die successiven Combinationsclassen, welche sich aus den Wurzeln der Gleichung bilden lassen, die Elemente als Factoren, die Formen als Theile gedacht, vollständig dar. Sind also $\overset{1}{G}, \overset{2}{G}, \overset{3}{G}, \ldots$ die successiven Coefficienten einer Gleichung, deren Wurzeln a, b, c, . . . seyn mögen, so wird, diese Wurzeln als Elemente von Combinationen gesetzt, $-\overset{1}{G}=\overset{1}{C}$, $\overset{2}{G}=\overset{2}{C}$, allgemein $(-1)^m\overset{m}{G}=\overset{m}{C}$ seyn. Soll also die Summe gleichhoher Potenzen von allen Wurzeln der Gleichung, wo allgemein das Zeichen $\overset{r}{A}$ die Summe der r^{ten} Potenzen von ihnen, $=a^r+b^r+c^r\ldots$ andeuten mag, gefunden werden, so kann es, vorausgesetzt daß die Summen aller

niedrigeren gleichhohen Potenzen, $\overset{r-1}{A}, \overset{r-2}{A}, ..$ jede für sich schon gefunden sind, durch folgende Formel geschehn:

$$\overset{r+1}{A} = -\overset{1}{G}\overset{r}{A} - \overset{2}{G}\overset{r-1}{A} - \overset{3}{G}\overset{r-2}{A} .. - \overset{r}{G}\overset{1}{A} - (r+1)\overset{r+1}{G}$$

Wegen der Zeichen würde es am bequemsten seyn, wenn durch $\overset{1}{G}, \overset{2}{G}, \overset{3}{G}, ..$ nicht die Coefficienten der Gleichung selbst sondern eben diese Größen, mit umgekehrten Zeichen, verstanden werden sollten, denn alsdann würde die Recursionsformel:

$$\overset{r+1}{A} = \overset{1}{G}\overset{r}{A} + \overset{2}{G}\overset{r-1}{A} ... + \overset{r}{G}\overset{1}{A} + (r+1)\overset{r+1}{G}.$$

Ihre Aehnlichkeit mit der für die successiven Coefficienten eines Quotienten der einfachsten Art ist auffallend; beyde würden vollkommen identisch seyn, wenn nicht hier die Bedingung hinzugefügt wäre, daß jedes Element der Recursion, da, wo es einzeln als Theil den Producten beygefügt wird, die sich aus den vorhergehenden Elementen, und den schon bestimmten vorhergehenden Hauptgrößen bilden, mit seiner eigenen Zahl multiplicirt werden soll. Will man sich also für die Berechnung der successiven Potenzen-Summen dieser Recursion bedienen, so wird das bey der Division angewandte Verfahren nur eine geringe Modification zu erleiden haben *k*).

---

k) Derselbe Mechanismus, welcher bey der Entwicklung von den successiven Coefficienten im Vorhergehenden angewendet wurde, läßt sich auch hier mit folgender Modification gebrauchen.

Man setze die successiv sich entwickelnden Potenzen-Summen in eine verticale Hauptreihe allmälig

Man wird aber auch bey dieser Untersuchung verlangen, einen independenten Ausdruck der gesuchten

---

unter einander. Zur Rechten an dieser von oben herab, setze man die mit ihrer eigenen Zahl multiplicirten Elemente, so weit sie reichen. Um alsdann ein folgendes Glied der Hauptreihe zu finden, setze man zur Linken an ihren schon gefundenen Gliedern die Elemente in natürlicher Ordnung herauf; berechne von jedem Paare der auf diese Art horizontal neben einander gestellten Zahlen das Product; schreibe alle diese Producte zur Rechten der Hauptcolumne neben der noch leeren Stelle, in welche das neue Glied der Hauptreihe kommen soll, horizontal neben einander, und addire diese ganze Horizontalreihe; ihre Summe ist das gesuchte neue Glied.

Es sey z. E. die Gleichung $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$ gegeben. Man sucht die sechs ersten Potenzen-Summen ihrer Wurzeln. Hier sind $+10, -35, +50 -24$, die Elemente der Recursion. Die Rechnung erhält folgendes Schema

$-24)+50)-35)10)$	10	$+10$
$-24)+50)-35)10)$	30	$-70+100$
$+50)-35)10)$	100	$+150+300-350$
$-35)10)$	354	$-96+1000-1050+500$
$10)$	1300	$3540-3500+1500-240$
	4890	$13000-12390+5000-720$

Die angenommene Gleichung ist aus den Wurzeln 1, 2, 3, 4, gebildet. Von diesen aber beträgt die Summe

der 1ten	2ten	3ten	4ten	5ten	6ten Potenzen
1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64
3	9	27	81	243	729
4	16	64	256	1024	4096
10	30	100	354	1300	4890

wodurch sich also die Resultate der obigen Rechnung völlig bestätigen.

Größen zu erhalten. Sie würden vollständige Inbegriffe von Variationsformen aus den gegebenen Elementen, der Summe angehörig, welche der Grad von den zu summirenden Potenzen ausdrückt, darstellen, wenn nicht in der Formel für ihre gegenseitige Beziehung gefodert würde, daß das letzte der gegebenen Elemente, da wo es zuerst einzeln in die Verbindung eintritt, mit seiner eigenen Zahl multiplicirt werden sollte. Indessen, da, diesen einzigen Umstand abgerechnet, die Recursion völlig dieselbe ist, wie bey der Bildung von Variationsformen zu successiven Summen, so wird man behaupten dürfen, daß aus ihr nichts anders als eben solche Variationsformen hervorgehn, mit der Modification, daß in ihnen jedes Element, sofern es als einzeln, und zum ersten Male gesetzt gedacht werden kann, d. h. sofern es Endelement in der Form ist, noch mit seiner eigenen Zahl multiplicirt werden müsse. Man bilde also aus den gegebenen Elementen alle Variationsformen zu derselben vorgeschriebenen Summe, und multiplicire jede Form mit der Zahl ihres Endelements. Die Formen als Theile, ihre Elemente als Factoren auf einander bezogen, wird man das Gesuchte erhalten.

Es ist aber bey dieser Regel noch eine wesentliche Abkürzung möglich. Die Variationsformen bilden sich aus einer einzigen Elementen Reihe, $\overset{1}{G}, \overset{2}{G}, \overset{3}{G}, \ldots$ und stellen Producte vor; Aenderung der Folge ist also ohne Einfluß auf ihren Werth; man wird einen bequemeren Ausdruck erhalten, wenn man aus den

gegebenen Elementen alle Combinationsformen bildet, und jede mit ihrer Versetzungszahl multiplicirt. Dabey ist aber die Foderung, daß jede der vorhandenen Variationsformen mit der Zahl ihres jedesmaligen Endelements multiplicirt werden sollte, nicht außer Acht zu lassen; sie erschwert und modificirt diese Zusammenziehung. Es sey eine Variationsform vorhanden, irgend eines der gegebenen Elemente, $\check{G}$, stehe als Endelement in ihr, und komme mehrere Male, etwa m mal, in ihr vor. Die Frage: wie viele Permutationen erlaubt die Form, so daß dieses Element in ihr das Endelement bleibt? beantwortet sich leicht. Es sey N die Permutationszahl, welche ihr zukommen würde, wenn sie unbedingt permutirt werden sollte. Nimt man das angeführte Element einmahl heraus, um aus allen übrigbleibenden alle mögliche Permutationen zu bilden, wie man es muß, wenn man alle die, aus der gegebenen entspringenden Formen haben will, in welchen jenes Element als Endelement erscheinen soll: so verliert jene anfängliche Permutationszahl, weil ein Element weniger da ist als vorher, den höchsten Factor ihres Zählers, oder muß, was damit einerley ist, durch den Grad der Classe wozu ihre Form gehört, dividirt werden, in welchem Zustande sie durch M ausgedrückt werden mag; sie verliert aber auch, weil die Zahl der gleichen Elemente, von der Art des einen herausgehobenen, $\check{G}$, vorher m, nun um eins geringer wird, jetzt m – 1, im Nenner eben diese Zahl als Factor, wird also

m. M. Nun soll jede Variationsform mit der Zahl ihres Endelements multiplicirt werden. Es gibt aber deren, die das Element $\overset{r}{G}$ am Ende führen, der Annahme zu Folge m M, alle von demselben Inhalt. Man wird also r. m. M als die Zahl bekommen, womit eine solche Form multiplicirt werden muß, wenn man alle gleichgeltenden Permutationsformen, in denen sie, jenes m mal in ihr vorkommende Element $\overset{r}{G}$ am Ende führend, erscheinen kann, zusammenfassen will. Nun aber kann jedes in ihr vorkommende Element ans Ende zu stehn kommen, und wird es unfehlbar. Man muß folglich für jedes besonders bestimmen, wie oft, vorausgesetzt daß es die letzte Stelle der Form einnehme, dieselbe, jedesmal mit seiner Zahl multiplicirt, permutirt werden könne, und alle diese Factoren zusammenrechnen, wenn man bestimmen will, wie oft überhaupt, ohne Aenderung ihres Gehalts, diese Form vorkommen wird. Bey diesen successiven Bestimmungen des Factors für die verschiedenen in der Form liegenden Elemente bleibt M dasselbe, die durch den Grad ihrer Form dividirte Permutationszahl: aber das, womit M noch multiplicirt werden muß, da es unbestimmt für das m mal vorkommende Element $\overset{r}{G}$, der vorigen Untersuchung gemäß, m r war, das heißt der Theil der Summe, welcher die Variationsform gehört, der von diesem Element, so fern es in ihr vorkommt, herrührt, wird für jedes andre Element dem gemäß anders ausfallen. Aber jene Zahl M

allmälig für jedes Element der Form mit dem Theile der aus ihr entspringenden Summe multipliciren, wozu dies Element beyträgt, und diese Producte zusammennehmen, oder dieselbe Zahl M auf einmal mit der ganzen Summe, welchem die Form angehört, multipliciren ist einerley. Daher die Regel: man bilde aus den gegebenen wiederholbaren Elementen, $\overset{1}{G}, \overset{2}{G}, \overset{3}{G}$.. alle Combinationsformen, die der nemlichen Summe angehören, und multiplicire jedes der dadurch angedeuteten Producte mit seiner Versetzungszahl, nur daß diese, durch die Zahl des Grades, welchem die Form gehört, dividirt, und mit der Summe, welche sie darstellt, multiplicirt werde. Das Aggregat dieser Producte gibt die Summe der gleichhohen Potenzen von allen Wurzeln derjenigen Gleichung, deren umgekehrte Coefficienten die Größen $\overset{1}{G}, \overset{2}{G}, \overset{3}{G}$,.. gewesen sind, und zwar des Grades, welcher mit der Zahl der angenommenen Summe zusammenfällt. Um den Satz in Zeichen auszudrücken, mag (p) die durch den Grad der zugehörigen Form dividirte Versetzungszahl bedeuten.

Es mögen a, b, c, .. die unbekannten Wurzeln einer Gleichung seyn, deren Form

$$x^n - \overset{1}{G}x^{n-1} - \overset{2}{G}x^{n-2} \ldots - \overset{n}{G} = 0$$

gegeben ist. Alsdann wird $a^r + b^r + c^r \ldots = r(p)^r C$, vorausgesetzt, daß sich das Zeichen C auf die wiederholbaren Elemente $\overset{1}{G}, \overset{2}{G}, \overset{3}{G}$,.. bezieht *l*).

l) Es sey für die Gleichung $x^4 - 10x + 35x^2 - 50x + 24 = 0$ die Summe der 4ten Potenzen ihrer

Die weitere Anwendung dieses Satzes kann hier nicht gegeben werden.

Achtes Kapitel.

Ausziehung der Wurzeln. Allgemeiner Beweis des binomischen Lehrsatzes für gebrochene und negative Exponenten.

Die Wurzelausziehung ist Umkehrung einer directen Operation, wie das Dividiren. Das Product mehrerer unter einander gleicher Formen wird allemal eine Form von ähnlichem Bau. Man kann also umgekehrt bey jeder gegebenen Form fragen, ob sie nicht im Product aus einer bestimmten Anzahl gleicher Formen seyn könnte, und eine von diesen anzugeben verlangen; dies ist es, was die Kunstsprache Wurzelausziehung nennt. Nun wird freylich die Zulässigkeit einer solchen Foderung hier noch mehr wie bey bestimmten Zahlen in der Arithmetik geläugnet werden müssen; indessen

---

Wurzeln zu suchen. Alsdann muß aus den Elementen $\overset{1}{10}, -\overset{2}{35}, \overset{3}{50}, -\overset{4}{24}$, berechnet werden $4.(p)^4C$. Man bekommt also die Formen

4) 4 realisirt — 96
4) 13 2000
$\frac{4}{2}$) 22 2450
4) 112 10000 — 14000
1111 14450 — 14096 = 354 wie oben.

Daß die recurrirende Berechnung bequemer als die independente sey, bedarf wohl keiner Erinnerung.

ist es leicht, sie so zu modificiren, daß alle Schwierigkeiten vermieden werden. Eine Form zu finden, die, auf eine bestimmte vorgeschriebene Potenz erhoben, eine andre gegebene hervorbringe, mag seltne Fälle abgerechnet, unmöglich seyn. Aber eine Form anzugeben, die zu jener Potenz erhoben, in allen Gliedern, die einen beliebig gewählten Rang nicht übersteigen, mit einer andern gegebenen identisch wird, muß, wie die nähere Betrachtung zeigt, allemal möglich seyn.

Es sey die gegebene Form $a + \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots \overset{n}{a}x^n \ldots$ Man frägt, ob sich nicht eine andre finden lasse, deren m^{te} Potenz, würklich berechnet, mit jener ersten in allen Gliedern bis zum n^{ten} Range übereinstimmen könnte? Man fingire, um die Frage zu beantworten, eine solche Form als schon gefunden $= A + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 \ldots$; man erhebe sie würklich zur m^{ten} Potenz, und setze das Resultat dieser Potenziirung bis zum n^{ten} Grade der gegebenen Form identisch $(A + \overset{1}{A}x^1 + \overset{2}{A}x^2 \ldots)^m = a + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots \overset{n}{a}x^n | \ldots$ Gerade dadurch werden sich Mittel ergeben, um Coefficienten der fingirten Form, der Absicht genügend, auf eine sichre und unzweideutige Weise zu bestimmen.

Aus der Lehre von der Multiplication ist bekannt, daß bey der Potenziirung einer Form zu jedem Coefficienten des Resultats genau so viele von den ersten Coefficienten der Form selbst, als die Zahl des gesuchten Coefficienten Einheiten enthält, beytragen: allge-

mein in Zeichen, zu dem $n + 1^{ten}$ Coefficienten der entwickelten Potenz $(A + \overset{1}{A} x^1 + \overset{2}{A}^2 \,..)^m$, die $n + 1$ ersten Coefficienten der Form selbst, $A, \overset{1}{A}, \overset{2}{A} \,.,\, \overset{n+1}{A}$. Es ist gleichfalls bekannt, daß jeder von ihnen, da wo er zum erstenmale erscheint, nur auf die erste Potenz erhoben vorkommen kann, den anfänglichen ausgenommen: in Zeichen: der Coefficient des ersten Gliedes nach dem anfänglichen in der Potenz unsrer Form, enthält nur A und $\overset{1}{A}$, den letzten nur in einem einzigen Gliede, welches $m A^{m-1} \overset{1}{A}$ seyn wird; der des zweytens Gliedes hat bloß $A, \overset{1}{A}, \overset{2}{A}$ in sich, und der letzte kommt nur in einem Gliede des ganzen Ausdrucks $m A^{m-1} \overset{2}{A}$ vor, u. s. w. Berechnet man also die $n + 1$ ersten Glieder jener gefoderten Potenz, um jeden ihrer Coefficienten dem gleichhohen Coefficienten der gegebenen Form einzeln gleichzusetzen, so bekommt man ebensoviele, $n + 1$, einzelne Gleichungen heraus. In der ersten Gleichung wird, als fingirte, und also noch unbekannte, Größe bloß der Anfangscoefficient der angenommenen Form vorkommen, $A^m = a$; sich also aus ihr bestimmen; in der zweyten Gleichung wird außer ihm, der nun schon bekannt geworden ist, auch noch der erste nachfolgende Coefficient, $\overset{1}{A}$, auf die erste Potenz erhoben, und mit einem bestimmten Factor multiplicirt, erscheinen, mithin eine Gleichung darbieten, die nur vom ersten Grade ist, in so fern er als

die einzige unbekannte Größe in ihr liegt, so daß er aus ihrer Auflösung jedesmal einen einzigen Werth erhalten wird. Und so muß jede folgende von diesen Gleichungen einen folgenden der fingirten Coefficienten, nur auf die erste Potenz erhoben, und mit einem bestimmten Factor multiplicirt, in sich schließen, der also wenn die vorhergehenden Coefficienten aus den früheren Gleichungen schon bestimmt sind, sicher und ohne Zweydeutigkeit aus ihr gefunden werden kann.

Auf diese Weise rechtfertigt sich das recurrirende Verfahren, welches in der Aufgabe der Wurzelausziehung unmittelbar vorgeschrieben ist. Man wird es in allen Fällen unfehlbar anwenden können, aber von der Einfachheit, welche das beym Dividiren beobachtete besitzt, wird es weit entfernt bleiben; wenn dort alle vorhergehende Coefficienten immer auf gleiche Weise zur Bildung des nächstfolgenden beytrugen, so wird es hier bey jedem neuen auf andre Art geschehn. Der Gang der Rechnung, wenn sie auf diesem Wege begonnen werden sollte, würde für die ersten Coefficienten folgender seyn

$$a + \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 + \overset{3}{a}x^3 \,.. = (A + \overset{1}{A}x + \overset{2\;2}{A}x + \overset{3}{A}{}^3 \,..)^m =$$

$$A^m + mA^{m-1}\overset{1}{A}x + \left.\begin{matrix} mA^{m-1}\overset{2}{A} \\ + m\frac{(m-1)}{1\cdot 2}\overset{1}{A}{}^{m-2}A^2 \end{matrix}\right\} x^2 +$$

Mithin, gleichhohe Coefficienten gleichgesetzt

$$A^m = a; \quad m A^{m-1} \overset{1}{A} = \overset{1}{a}$$

$$A = a^{\frac{1}{m}} \qquad \overset{1}{A} = \frac{\overset{1}{a}}{m A^{m-1}} = \frac{1}{m} a^{\frac{1}{m}-1} \overset{1}{a};$$

$$\frac{m A^{m-1} \overset{2}{A} + \frac{m.(m-1)}{1.m} A^{m-2} \overset{1}{A}{}^2 = \overset{2}{a}}{}$$

$$\overset{2}{A} = \frac{\overset{2}{a} - \frac{m.(m-1)}{1.2} A^{m-2} \overset{1}{A}{}^2}{m A^{m-1}}$$

$$\overset{2}{A} = \frac{1}{m} \overset{2}{a} . a^{1-\frac{1}{m}} - \frac{\frac{1}{m}.\left(\frac{1}{m}-1\right)}{1.2} a^{\frac{1}{m}-2} . \overset{1}{a}{}^2$$

Eine so verwickelte Recursion, wie diese combinatorisch zu entwickeln, so, daß aus dem Zusammenhange, welchen sie unter den gesuchten Coefficienten stiftet, das independente Gesetz ihrer Bildung abstrahirt wer- könnte, dazu setzt uns keine der vorhin entwickelten combinatorischen Operationen in den Stand. Zwar läßt sich allerdings die Untersuchung vereinfachen, indem man sich Anfangs begnügt, statt einer unbestimmt vielgliedrigen Form, nur eine des ersten Grades zu nehmen, um aus ihr die Wurzel eines beliebigen Grades auszuziehen. Könnte man für $\sqrt[m]{(a+Z)} = A + \overset{1}{A} Z + \overset{2}{A} Z^2 + ..$ das unabhängige Gesetz der Bildung aller Glieder finden, so hätte man es mit leichter Mühe auch für $\sqrt[m]{(a + \overset{1}{a} x^1 + \overset{2}{a} x^2 .)}$. Denn man braucht nur im letzten Falle einstweilig für

den Inbegriff aller folgenden Glieder, $\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots = z$ zu setzen, mithin jene erste Reihe für $\sqrt[m]{(a+z)}$ geradezu anzuwenden, und hernach in ihr statt der successiven Potenzen von z, wonach sie fortschreitet, die entwickelten Werthe derselben an die Stelle zu setzen, um Alles zuletzt nach Potenzen der ursprünglichen Hauptgröße x, zusammen zu ordnen: eine leichte combinatorische Arbeit, da für ganze positive Potenzen einer regelmäßigen Form, wie $\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 + \ldots$, die independenten Gesetze der Bildung aus dem vorhergehenden bekannt sind. Aber damit ist im Wesentlichen wenig gewonnen; die Recursionsformel selbst bleibt fast eben so verwickelt wie vorhin, sey es auch, daß die independenten Ausdrücke der sich aus ihr entwickelnden Coefficienten ohne Vergleich einfacher werden. Die Berechnung erhält jetzt dieselbe Gestalt, wie vorhin, nur daß die Größen $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots$ sämmtlich $= 0$ gesetzt werden. Und alsdann enstehn für die fingirten Coefficienten die Resultate

$$A = a^{\frac{1}{m}};\ \overset{1}{A} = \frac{1}{m} \cdot a^{\frac{1}{m}-1},\ \overset{2}{A} = \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{1}{m} - 1\right) a^{\frac{1}{m}-2}$$

Betrachtet man die Resultate, welche sie für die independente Bestimmung der gesuchten Coefficienten darbietet, so zeigt sich in der That in ihnen ein sehr einfaches, und mit einer bekannten Formel übereinstimmendes Gesetz. Wurzelgrößen können, den Lehren der Arithmetik zu Folge, als Potenzen mit gebrochenen

Exponenten betrachtet werden; $\sqrt[n]{(a+z)} = (a+z)^{\frac{1}{n}}$. Wollte man annehmen, daß dieselbe Regel, welche bey der Entwicklung von Potenzen eines zweytheiligen Ausdrucks, deren Exponenten ganze positive Zahlen sind, aus der Natur des Multiplicirens abgeleitet ist, auch für Potenzen mit gebrochenen Exponenten beybehalten werden könne, so erhielte man:

$$(a+z)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1} . z + \frac{\frac{1}{n} . \left(\frac{1}{n} - 1\right) a^{\frac{1}{n}-2}}{1 . 2} . z^2$$

$$+ \frac{\frac{1}{n} . \left(\frac{1}{n} - 1\right) . \left(\frac{1}{n} - 2\right) a^{\frac{1}{n}-3}}{1 . 2 . 3} z^3 \ldots$$

eine Reihe, deren Uebereinstimmung mit derjenigen, welche unmittelbar vorhin auf dem Wege der recurrirenden Bestimmung für $\sqrt[n]{(a+z)}$ gefunden worden, von selbst klar ist, und die bey weiter fortgesetzter beyderseitiger Berechnung sich dabey auch ferner erhalten würde.

Es entsteht also, auf dem Wege der Beobachtung die gegründete Vermuthung, ob nicht dieselbe Regel, welche bey der Entwicklung ganzer positiver Potenzen statt findet, auch für gebrochene Exponenten in ungeänderter Form beybehalten werden könnte, so daß die Art, wie sich die Coefficienten der entwickelten Reihe aus dem Exponenten der gefoderten Potenz erzeugen, immer die nemliche bleiben müßte. Diese Vermuthung erlangt dadurch einen höheren Grad von Wahrscheinlichkeit, daß für Potenzen mit ganzem, aber negativem

Exponenten, deren Werthe die Divisionentwickeln kann, weil sie sich auf Quotienten zurückführen lassen, in der That eben dieses Gesetz unbedingt gültig ist; ein Satz der sich schon hier unbedingt beweisen lassen würde, wenn es sich zu der gegenwärtigen Absicht der Mühe verlohnte.

Wir müssen also die Frage in genauere Untersuchung nehmen, ob nicht die Formel des binomischen Lehrsatzes, die hier zur Erleichterung der Untersuchung in ihrer einfachsten Gestalt ausgedrückt werden mag

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n.(n-1)}{1.2}x^2 \ldots + \frac{n.(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r}x^r \ldots$$

unbedingt für jeden beliebigen Werth von n, eben so gut, wie für ganze Zahlen, angewandt werden dürfe.

Der Beweis für die Richtigkeit einer solchen Annahme wird am einfachsten geführt, sobald man darzuthun vermag, daß zwey Formen, die nach Potenzen der nemlichen Hauptgröße fortschreiten, und deren Coefficienten aus einer unbestimmt angenommenen Größe auf dieselbe Art gebildet sind, wie Binomialcoefficienten aus ihrem Exponenten zusammengesetzt werden müssen, zum Producte eine ähnliche Form hervorbringen, deren Coefficienten gleichfalls nach dem nemlichen Gesetze erzeugt sind, aus einer unbestimmten Größe, welche die Summe derjenigen ist, woraus die Coefficienten der angenommenen Factoren gebildet waren. In Zeichen [wenn allgemein $^{f}\overset{r}{B}$ eine Größe bedeutet, die sich aus f und r zusammensetzt, wie sich,

wenn f eine ganze Zahl wäre, der r^{te} Binomialcoefficient der Potenz des Grades f von einer zweytheiligen Größe erzeugen würde, d. h. ${}^{f}\overset{r}{\mathfrak{B}} = \frac{f.(f-1)..(f-r+1).}{1.2...r}$]: es kommt nur darauf an, zu beweisen daß

$$(1 + {}^{f}\overset{1}{\mathfrak{B}}x + {}^{f}\overset{2}{\mathfrak{B}}x^2 .. + {}^{f}\overset{n}{\mathfrak{B}}x^n ..).$$
$$(1 + {}^{g}\overset{1}{\mathfrak{B}}x + {}^{g}\overset{2}{\mathfrak{B}}x^2 .. + {}^{g}\overset{n}{\mathfrak{B}}x^n ..) =$$
$$1 + {}^{f+g}\overset{1}{\mathfrak{B}}x^1 + {}^{f+g}\overset{2}{\mathfrak{B}}x^2 .. {}^{f+g}\overset{n}{\mathfrak{B}}x^n ..$$

Sobald dieser Satz feststeht, und aus der Natur des Multiplicirens in gänzlicher Allgemeinheit bewiesen ist, begründet sich die unbedingte Anwendbarkeit des binomischen Lehrsatzes für negative und gebrochene Exponenten mit leichter Mühe. Zuerst ist selbst klar, daß für mehr als zwey solche Formen, die sich mit einander multipliciren sollen, das Product eine ähnliche Form werden muß, deren Coefficienten nach dem nemlichen Gesetze aus einer Größe entstehn, welche die Summe derjenigen ist, woraus die Coefficienten der Factoren hervorgegangen sind. Wenn es also auf eine Entwicklung der Wurzelgröße $\sqrt[n]{(1+x)}$ ankommt, so nehme man, ohne in diesem Augenblick zu fragen, was sie bedeutet, eine Form an, deren Coefficienten aus dem Bruche $\frac{1}{n}$ auf eben die Art, wie Binomialcoefficienten aus ihrem Exponenten gebildet sind $1 + {}^{\frac{1}{n}}\overset{1}{\mathfrak{B}}x + {}^{\frac{1}{n}}\overset{2}{\mathfrak{B}}x^2 ... {}^{\frac{1}{n}}\overset{r}{\mathfrak{B}}x^r ...$

Vermöge jenes, als bewiesen hier einstweilig voraus-gesetzten Satzes darf alsdann behauptet werden, daß, wenn n solcher Formen mit einander multiplicirt werden, als Product eine neue zum Vorschein kommen müsse, deren Coefficienten sich aus der Summe von den n Größen, woraus die der Factoren entstanden sind, nach eben der Regel zusammensetzen. Diese Summe aber, da jede der angenommenen Größen $\frac{x}{n}$ ist beträgt $n \cdot \frac{x}{n} = 1$; setzt man aber aus 1 nach der Regel des binomischen Lehrsatzes Coefficienten wie Binomial-coefficienten zusammen, so wird der erste $^{1}\overset{1}{\mathfrak{B}} = 1$; der zweyte $^{1}\overset{2}{\mathfrak{B}} = \frac{1.(1-1)}{1.2} = 0$, und daher auch alle folgenden $= 0$. Es wird also das Product jener n unbestimmt angenommenen unter einander gleichen Formen $= 1 + x$. Es stellt also jede von ihnen eine Größe dar, welche, zur n^{ten} Potenz erhoben, $1 + x$ geben muß, das heißt jede von ihnen ist $\sqrt[n]{(1+x)} = (1+x)^{\frac{1}{n}}$, und die unbedingte Gültigkeit des binomischen Satzes für gebrochene Exponenten ist dargethan. Man könnte, auf dieselbe Weise, sie für Wurzelgrößen, die zugleich Potenzen sind, $(1+x)^{\frac{m}{n}}$, rechtfertigen.

Ebenso erhellet auf dieselbe Art die Anwendbarkeit des binomischen Lehrsatzes auf Potenzen mit negativen Exponenten. Man nehme eine Form, deren Coefficienten sich aus der Zahl $-n$ nach demselben Gesetze,

wie Binomialcoefficienten aus ihren Exponenten ableiten

$$1 + {}^{-n}\overset{1}{B}x + {}^{-n}\overset{2}{B}x^2 \ldots + {}^{-n}\overset{r}{B}x^r \ldots$$

Was auch die Bedeutung dieser Form seyn möge, so muß sie mit einer andern, die ihre Coefficienten auf eben die Art aus der umgekehrten Zahl $+n$ gebildet hat, $1 + {}^{n}\overset{1}{B}x + {}^{n}\overset{2}{B}x^2 \ldots + {}^{n}\overset{r}{B}x^r \ldots$ multiplicirt, zum Producte eine dritte ähnliche Form geben, deren Coefficienten sich auf die vorige Weise aus einer Zahl erzeugen, welche die Summe jener beyden in den Factoren angenommenen, also $-n + n = 0$ ist. Aber wenn man aus 0, nach der Regel, vermöge welcher aus einem angenommenen Exponenten sich Binomialcoefficienten bilden, Zahlen zusammensetzt, so wird schon die erste davon $0\overset{1}{B}$, mithin auch alle folgenden $= 0$; mithin ist das Product der beyden angenommenen Formen $= 1 + 0x + \ldots = 1$. Nun aber war die letzte von ihnen würklich $(1 + x)^n$; es muß also die erste, weil sie mit dieser zum Producte 1 hervorbringt $\frac{1}{(1+x)^n} = (1+x)^{-n}$ gewesen seyn.

Wir werden also die aus dem Vorhergehenden hinlänglich bekannte Regel des binomischen Satzes für jeden beliebigen Exponenten gebrauchen dürfen, sobald das schon vorläufig angedeutete Gesetz bewiesen ist, welches dem Producte der beyden unbestimmten Formen:

$$1 + fx + \frac{f.(f-1)}{1.2}x^2 + \frac{f(f-1)(f-2)}{1.2.3}x^3 \ldots f\overset{r}{B} + x^r \ldots$$

$$1+gx+\frac{g.(g-1)x^2}{1.2}+\frac{g(g-1).(g-2)x^3}{1.2.3}\ldots+g\overset{r}{\mathfrak{B}}x^r\ldots$$

angehört.

Der Anfang der würklichen Berechnung bestätigt sogleich den oben aufgestellten Satz. Das erste Glied des Products bekommt zum Coefficienten $f+g$; das zweyte $\frac{f.(f-1)}{1.2}+g+\frac{g(g-1)}{1.2}$. Von diesem lezten ist es leicht zu zeigen, daß er in der That nichts anders ist, als $^{f+g}\overset{2}{\mathfrak{B}}=\frac{(f+g).(f+g-1)}{1.2}$; Denn man nehme erst den ersten Theil des Factors $f+g$, nemlich f, nur ihn mit dem andern Factor $(f-1)+g$ zu multipliciren; man wird zwey Producte, $f.(f-1)+fg$ erhalten. Man nehme hernach den zweyten Theil eben desselben, g, um ihn mit der nemlichen Größe, $f+(g-1)$ multiplicirt werden zu lassen: es werden aufs Neue zwey Producte entstehn, $fg+g(g-1)$. Es ist also offenbar, wenn man diese Producte zusammenrechnet

$$\frac{(f+g).(g+g-1)}{1.2}=\frac{f.(f-1)}{1.2}+fg+\frac{g.(g-1)}{1.2}$$

Eben so erhält das dritte Glied des Products den Coefficienten $\frac{f.(f-1)(f-2)}{1.2.3}+\frac{f.(f-1)}{1.2}.g+\frac{f.g(g-1)}{1.2}+\frac{g.(g-1).(g-2)}{1.2.3}$, und es kann sogleich auf die nemliche Weise gezeigt werden, daß er mit

$\overset{3}{\mathfrak{B}}_{f+g}$ identisch seyn müsse. Denn wenn man den vorigen Coefficienten

$$\frac{f.(f-1)}{1.2} + fg + \frac{g.(g-1)}{1.2} = \frac{(f+g)(f+g-1)}{1.2}$$

mit dem Factor $\frac{f+g-2}{3}$ multiplicirt, so kommt bey gehörig eingeleiteter Rechnung gerade die Form dieses dritten Coefficienten heraus, der also ebendeswegen $\frac{(f+g).(f+g-1).(f+g-2)}{1.2.3}$ seyn wird. Bey dieser Multiplication muß man aber, um das angegebene Resultat zu erhalten, auf eine besondre Art verfahren, die sich bey der Entwickelung aller folgenden Coefficienten immer selbst gleich bleibt, und auf welche der ganze Beweis zurückkommt. Man muß nemlich, indem man allmälig jedes Glied der zu multiplicirenden Form nach der Reihe vornimt, den multiplicirenden Bruch selbst in zwey Theile zerfällen, so daß aus jedem Gliede des Multiplicands, weil der Multiplicator zweytheilig ist, zwey Partialproducte entspringen. Aber diese Zerlegung des Multiplicators in zwey Theile muß für jedes Glied des Multiplicands auf eine besondre Art gemacht werden. Es besteht der Zähler des Multiplicators jedesmal aus drey Stücken, den beyden Hauptgrößen, $f+g$, und einer davon abzuziehenden negativen ganzen Zahl, die im gegenwärtigen Falle -2 heißt. Die beyden Theile, in welche er zerfallen, soll führen jedesmal, der erste die eine Hauptgröße f, der zweyte die andre g, an der Spitze, vertheilen aber jene dritte noch angehenkte

negative Zahl bey jeder Multiplication unter sich auf andre Weise. Bey der ersten zieht die erste Hauptgröße sie ganz an sich, so daß alsdann der Multiplicator die Form $\frac{(f-2)}{3} + \frac{g}{3}$ annimmt. Bey der zweyten läßt die erste Hauptgröße von ebenderselben eine Einheit fahren, die sich zur zweyten gesellt, so daß im vorliegenden Falle der Multiplicator die Gestalt $\frac{f-1}{3} + \frac{g-1}{3}$ erhält. Und so wird bey jeder folgenden Multiplication dem ersten Theile des Multiplicators eine mehr von den ihm anfangs völlig beygelegten Einheiten der negativen ganzen Zahl abgenommen, um dem zweyten Theile beygelegt zu werden. Hat auf diese Art jedes Glied des Multiplicands zwey Producte gegeben, so zieht man jedesmal das zweyte Product der vorhergehenden Multiplication mit dem ersten der nächstfolgenden, in eine Summe zusammen, und erhält so das Resultat in der gewünschten Gestalt. Die Ausführung der Arbeit nach dieser Vorschrift wird die Zulässigkeit derselben beweisen.

Um also die Form $\frac{f.(f-1)}{1.2} + f.g + \frac{g(g-1)}{1.2}$ auf die eben angewiesene Art mit $\frac{f+g-2}{3}$ zu multipliciren, nehme man ihr erstes Glied, $\frac{f.(f-1)}{1.2}$, und für dasselbe als Multiplicator $\frac{(f-2)}{3} + \frac{g}{3}$; man erhält alsdann die beyden Producte $\frac{f.(f-1)(f-2)}{1.2.3}$

$+\frac{f.(f-1)}{1.2}.\frac{g}{3}$. Eben so ihr zweytes fg, und dazu als Multiplicator $\frac{f(-1)}{3}+\frac{(g-1)}{3}$; so entstehn die Producte $\frac{f.(f-1)}{3}.g+\frac{f.g.(g-1)}{3}$. Zulezt ihr drittes Glied $\frac{g.(g-1)}{1.2}$, und zu ihm als Multiplicator $\frac{f}{3}+\frac{(g-2)}{g}$; daraus bilden sich die Producte $\frac{f}{3}.\frac{g(g-1)}{1.2}+\frac{g.(g-1)(g-2)}{1.2.3}$. Man vereinige zulezt die gefundenen Producte auf die vorgeschriebene Art

$$\frac{f.(f-1)(f-2)}{1.2.3}+\frac{f.(f-1)}{1.2}\frac{g}{3}$$
$$+\frac{f.(f-1).g}{3}+\frac{f.g(g-1)}{3}$$
$$+\frac{f.g(g-1)}{3.1.2}+\frac{g.(g-1)(g-2)}{1.2.3}$$

$$\frac{f.(f-1)(f-2)}{1.2.3}+\frac{f.(f-1).g}{1.2}+\frac{f.g(g-1)}{1.2}+\frac{g.(g-1)(g-2)}{1.2.3}$$

Eine Form, welche mit der des dritten Coefficienten identisch ist, mithin beweißt, daß er selbst $\overset{3}{f+g\,\mathfrak{B}}$ seyn müsse.

Zur Uebung in dem vorgeschriebenen Verfahren mag noch der vierte Coefficient des Products

$$\frac{f.(f-1).(f-2).(f-3)}{1.2.3.4}+\frac{f.(f-1).(f-2)g}{1.2.3}+$$
$$\frac{f.(f-1)}{1.2}\frac{g.(g-1)}{1.2}+\frac{f.g.(g-1).(g-2)}{1.2.3}+\frac{g.(g-1).(g-2).(g-3)}{1.2.3.4}$$

vorgenommen werden, um zu beweisen, daß er durch Multiplication des eben betrachteten dritten mit

$\frac{f+g-3}{4}$ entstehe, und also $^{f+g}\overset{4}{\mathfrak{B}}$ seyn werde, da dieser $^{f+g}\overset{3}{\mathfrak{B}}$ gewesen ist.

Der erste Theil des Multiplicands ist hier $\frac{f.(f-1.(f-2)}{1.2.3}$

Der für ihn geformte Multiplicator $\frac{(f-3)}{4}+\frac{g}{4}$

Die aus ihm entspringenden Producte

$$\frac{f(f-1).(f-2).(f-3)}{1.2.3.4}+\frac{f.(f-1).(f-2)}{1.2.3}.\frac{g}{4}$$

Der zweyte Theil des Multiplicands $\frac{f.(f-1)g}{1.2}$

Sein Multiplicator $\frac{(f-2)}{4}+\frac{(g-1)}{4}$

Seine Producte $\frac{f.(f-1)}{1.2}.\frac{(f-2)}{4}.g+\frac{f.(f-1).g}{1.2}.\frac{(g-1)}{4}$

Der dritte Theil des Multiplicands $\frac{f.g.(g-1)}{1.2}$

Dessen Multiplicator $\frac{(f-1)}{4}+\frac{(g-2)}{4}$

Seine Producte $\frac{f.(f-1)}{4}.\frac{g.(g-1)}{1.2}+\frac{f.g.(g-1).(g-2)}{1.2.4}$

Der vierte Theil des Multiplicands $\frac{g.(g-1).(g-2)}{1.2.3}$

Sein Multiplicator $\frac{f}{4}+\frac{g-3}{4}$

Seine Producte $\frac{fg}{4}.\frac{(g-1).(g-2)}{1.2.3}+\frac{g.(g-1).(g-2.(g-3)}{1.2.3.4}$

Man stelle jetzt die Producte dieser Multiplicationen in der vorgeschriebenen Ordnung zumsammen um sie zu vereinigen

$$\frac{f.(f-1).(f-2)(f-3)}{1.2.3.4} + \frac{f.(f-1)(f-2)g}{1.2.3.4}$$
$$+ \frac{f.(f-1)(f-2)g}{1.2.4}$$

$$\frac{f.(f-1).(f-2)(f-3)}{1.2.3.4} + \frac{f.(f-1)(f-2).g}{1.2.3}$$
$$+ \frac{f(f-1).g.(g-1)}{1.2.4}$$
$$+ \frac{f(f-1).g.(g-1)}{1.2.4} + \frac{f.g.(g-1).(g-2)}{1.2.4}$$
$$+ \frac{f\,g.(g-1)(g-2)}{4.1.2.3} + \frac{g.(g-1)(g-2)(g-3)}{1.2.3.4}$$

$$+ \frac{f.(f-1)}{1.2}\,\frac{g.(g-1)}{1.2} + \frac{f.g.(g-1).(g-2)}{1.2.3} + \frac{g(g-1).(g-2)(g-2)}{1.2.3.4}$$

Auf dieselbe Weise könnte man fortfahren, auch für die folgenden Coefficienten des Products zu zeigen, daß sie aus den vorhergehenden nach demselben Gesetze entstehn, wonach sich die successiven Binomialcoefficienten einer Potenz, deren Exponent $f+g$ heißen sollte, aus einander erzeugen würden. Es ist aber genug, sich durch würklich angestellte Rechnung davon überzeugt zu haben, daß die ersten Coefficienten des Products diesem Gesetze unterworfen sind. Seine Gültigkeit für alle übrigen wird bewiesen seyn, sobald dargethan werden kann, daß es für jeden nachfolgenden Coefficienten Statt haben müsse, falls es für den nächstvorhergehenden, unbestimmt gelassen, der wievielste es seyn soll, als gültig angenommen wird. Das heißt, in Zeichen ausgedruckt, wir haben darzuthun, daß, wenn der r^{te} Coefficient, welchen das Product unsrer angenommenen Formen aus unmittelbarer Multiplica-

tion erhält, $\overset{r}{f+g\mathfrak{B}}$ gewesen ist, der folgende $r+1$te Coefficient, wie ihn die Multiplication ergibt, aus jenem nächst vorhergehenden durch Hinzufügung des Factors $\frac{f+g-r}{r+1}$ gebildet werden könne, und also, dem bekannten Gesetze der Binomialcoefficienten gemäß, $\overset{r+1}{f+g\mathfrak{B}}$ sey.

Bedienen wir uns zur Abkürzung überhaupt der für Binomialcoefficienten eingeführten Zeichen, so sind die beyden mit einander zu multiplicirenden Formen

$$1+{}^f\overset{1}{\mathfrak{B}}x+{}^f\overset{2}{\mathfrak{B}}x^2..{}^f\overset{k-1}{\mathfrak{B}}x^{k-1}+{}^f\overset{k}{\mathfrak{B}}x^k+..{}^f\overset{r}{\mathfrak{B}}x^r+{}^f\overset{r+1}{\mathfrak{B}}x^{r+1}.$$

$$1+{}^g\overset{1}{\mathfrak{B}}x+{}^g\overset{2}{\mathfrak{B}}x^2..{}^g\overset{k-1}{\mathfrak{B}}x^{k-1}+{}^g\overset{k}{\mathfrak{B}}x^k+..{}^g\overset{r}{\mathfrak{B}}x^r+{}^g\overset{r+1}{\mathfrak{B}}x^{r+1}.$$

Will man das $r$te Glied ihres Products, so muß man, um dessen Coefficienten zu erhalten, alle Partialproducte aus denjenigen Coefficienten der beyden Reihen bilden, von welchen die Indices zusammen r ausmachen. Es ist also allgemein der $k-1$te Theil dieses Coefficienten ${}^f\overset{r-(k-1)}{\mathfrak{B}}.{}^g\overset{k-1}{\mathfrak{B}}$, und eben so der $k$te Theil desselben ${}^f\overset{r-k}{\mathfrak{B}}.{}^g\overset{k}{\mathfrak{B}}$. Nach eben dem Gesetze bildet sich der Coefficient des nächstfolgenden, $r+1$ten Gliedes, wenn er durch unmittelbare Multiplication gesucht wird. Sein $k$ter Theil wird seyn: ${}^f\overset{r+1-k}{\mathfrak{B}}.{}^g\overset{k}{\mathfrak{B}}$. Und der gewünschte Beweis wird darzuthun haben, daß die Form des 1ten Coefficienten, mit dem Factor $\frac{f+g-r}{r+1}$ multiplicirt, genau die Form des $r+1$ten hervorbringe.

Die Ordnung, welche man bey der Multiplication zusammengesetzter Ausdrücke beobachtet, ist willkührlich. Wir wollen also in dieser Rücksicht Folgendes festsetzen. Es soll allmälig jeder Theil des Multiplicands nach der natürlichen Rangsolge multiplicirt werden. Aber aus jedem sollen zwey Producte entspringen, dadurch, daß der Multiplicator für ihn in zwey Theile zerschnitten wird. Man soll nemlich diesen jedesmal in zwey Brüche zerreissen, wovon der erste die Hauptgröße f, und soviel negative Einheiten, als die vorhandenen, $-r$, übrig lassen, wenn man sie um die Zahl des aus dem Multiplicand genommenen Theils verringert, zum Zähler bekommt; während der Zähler des zweyten Bruchs die andre Hauptgröße, g, zusammt den bey der Bildung des vorigen weggelassenen negativen Einheiten, in sich schließen soll. In Zeichen: wenn man den k^{ten} Theil des Multiplicand behandelt, so soll der Multiplicator in die beyden Brüche $\frac{f-(r-k)}{r+1} + \frac{g-k}{r+1}$ zerlegt werden. Ferner wollen wir bey der Vereinigung von denjenigen Partialproducten, die aus diesen successiven Multiplicationen entspringen, allemal die Regel beobachten, daß sich das zweyte, welches aus einem gewissen Theile des Multiplicands entspringt, mit dem ersten, welches aus dem nächstfolgenden Theile eben desselben entsteht, zu einer Summe vereinigen soll. In Zeichen: um das k^{te} Glied des Products zu erhalten, soll sich das zweyte Partial-Product, welches aus dem $k-1^{ten}$ Theile des Mul-

tiplicand entsteht, mit dem ersten, welches aus dem k^{ten} Theile des nemlichen erzeugt wird, vereinigen. Nach dieser deutlichen Bezeichnung des zu beobachten. Verfahrens, wird es leicht seyn, zum Resultate zu gelangen.

Die Form des unbestimmten r^{ten} Coefficienten hat zum

$k-1^{ten}$ Theile ${}^{f}\overset{r-(k-1)}{\mathfrak{B}} \cdot {}^{g}\overset{k-1}{\mathfrak{B}}$

für diesen ist $\frac{f-[r-(k-1)]}{r+1} + \frac{g-(k-1)}{r+1}$ der Multiplicator.

Mithin das zweyte der daraus entstehenden Partial-

producte $= {}^{f}\overset{r-(k-1)}{\mathfrak{B}} \cdot {}^{g}\overset{k-1}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{(g-k)}{r+1}$.

Nun aber ist es aus den Regeln der Bildung für die Binomialcoefficienten bekannt, daß ${}^{g}\overset{k}{\mathfrak{B}} = \frac{(g-k-1)}{k}$. ${}^{g}\overset{k-1}{\mathfrak{B}}$, so daß also, wenn man das ebengenannte Product im Zähler und Nemer mit $k+1$ multipliciren will, es abgekürzt durch ${}^{f}\overset{r-(k-1)}{\mathfrak{B}} \cdot {}^{g}\overset{k}{\mathfrak{B}} \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)$ ausgedrückt werden kann.

Ferner ist der nächste k^{te} Theil des Multiplicand's ${}^{f}\overset{r-k}{\mathfrak{B}} \cdot {}^{g}\overset{k}{\mathfrak{B}}$ für ihn wird $\frac{f-(r-k)}{r+1} \cdot \frac{(g-k)}{r+1}$ der Multiplicator

Mithin das erste der beyden, aus diesen Factoren entspringenden Producte $= \frac{[f-(r-k)]}{r+1}\ {}^{f}\overset{r-k}{\mathfrak{B}} \cdot {}^{g}\overset{k}{\mathfrak{B}}$.

Man kann aber auf ähnliche Weise wie vorhin, da ${}^{f}\overset{r-k+1}{\mathfrak{B}} = \frac{[f-(r-)\,k]}{r.k+1} \cdot {}^{f}\overset{r-k+1}{\mathfrak{B}}$, indem man Zähler und

Nenner des lezten Products mit $(r-k+1)$ multiplicirt, es auf die einfachere Gestalt $\dfrac{(r-k+1)\,{}^{f}\overset{r-k}{\mathfrak{B}}\,.\,{}^{g}\overset{k}{\mathfrak{B}}}{r+1}$. zurückführen.

Die Summe der beyden, so erzeugten, Partialproducte, und in ihr das k^{te} Glied des gesuchten Totalproducts ergibt sich sogleich, da die beyden Binomialcoefficienten, so wie der Divisor, welche in ihnen vorkommen, identisch sind, und nur die beygesetzten Factoren eine Abweichung zeigen. So gibt das erste

$$\frac{{}^{f}\overset{r-k+1}{\mathfrak{B}}\,.\,{}^{g}\overset{k}{\mathfrak{B}}\,.\,k}{r+1}$$

und das zweyte $\dfrac{{}^{f}\overset{r-k+1}{\mathfrak{B}}\,.\,{}^{g}\overset{k}{\mathfrak{B}}\,.\,(r-k+1)}{(r+1)}$, zusammen addirt

$$\frac{{}^{f}\overset{r-k+1}{\mathfrak{B}}\,.\,{}^{g}\overset{k}{\mathfrak{B}}\,.\,(k+r-k+1)}{(r+1)} = {}^{f}\overset{r-k+1}{\mathfrak{B}}\,.\,{}^{g}\overset{k}{\mathfrak{B}}.$$

Nun aber haben wir gesehn, daß der $r+1^{te}$ Coefficient unserer angenommenen Formen ein zusammengesetzter Ausdruck war, von welchem allgemein der k^{te} Theil durch ${}^{f}\overset{r+1-k}{\mathfrak{B}}\,.\,{}^{g}\overset{k}{\mathfrak{B}}$ dargestellt wurde. Es ist also jezt dargethan worden, daß jedes Glied des $r+1^{ten}$ Coefficienten herauskommt, wenn man die successiven Glieder des nächstvorhergehenden r^{ten} mit dem Factor multiplicirt, welcher dem r^{ten} Binomialcoefficienten der Potenz des Grades $f+g$ beygefügt werden müßte, wenn man den nächstfolgenden ebenderselben erhalten wollte. Ist folglich nur irgend ein Coefficient des Products von jenen beyden Formen auf

die angegebene Weise nach dem Gesetze der Binomialcoefficienten gebildet, wie wir z. E. für die vier ersten es durch würkliche Rechnung bewiesen haben, so muß es mit jedem nachfolgenden auf gleiche Weise der Fall seyn.

Es ist schon im Anfange dieser Betrachtungen gezeigt worden, daß die unbedingte Gültigkeit des binomischen Lehrsatzes für negative und gebrochene Exponenten eine unmittelbare Folge des eben abgeleiteten Satzes sey, so daß wir also jetzt berechtigt sind, die bekannte Formel $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n.(n-1)}{1.2}x^2 \ldots + \frac{n..(n-r+1)}{1.2.r}x^r \ldots$ als für jeden beliebigen Werth des Exponenten n gültig anzunehmen. Man kann ihr auch genau dieselbe Gestalt wieder geben, unter welcher sie zuerst in Beziehung auf ganze positive Exponenten vorgekommen ist. Denn die Form $(a+b)^n$ ist einerley mit $a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$. Man setze also nur in dem obigen Ausdrucke für $(1+x)^n$ anstatt x den Bruch $\frac{b}{a}$, so gibt er die Entwicklung von $\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$. Man multiplicire endlich alle Glieder dieser Reihe mit a^n, so erhält man den Werth von $a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = (a+b)^n = a^n + n.a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 \ldots \frac{n.(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r}a^{n-r}.b^r.$

die bekannte anfängliche Formel, nur daß sich jetzt ihre Bedeutung auf alle Arten von Exponenten erweitert hat.

Es verdient dabey wohl bemerkt zu werden, daß die Reihen, welche sich nach dieser Formel entwickeln, nur dann von selbst abbrechen, wenn der Exponent eine ganze positive Zahl ist, hingegen fortgesetzt werden können, so weit man will, sobald er eine negative Zahl, oder ein Bruch seyn sollte, ein Umstand, welcher mit der Natur der Operationen, welche durch solche Exponenten angedeutet werden, nothwendig verbunden ist. Es kann für den Gebrauch von Nutzen seyn, dasjenige was sich in der allgemeinen Formel für die beyden letzten Fälle specialisiren läßt, näher zu bemerken. Es sey also zuerst der Exponent eine negative Zahl $n = -m$, alsdann werden alle die einzelnen Factoren, aus denen sich die Zähler der Binomialcoefficienten bilden, negative und successiv um eine Einheit wachsende Zahlen, $-m$, $-(m+1)$ u. s. w. Die Producte aus ihnen also bekommen, je nachdem sie von gerader oder ungerader Zahl sind, das $+$, oder das $-$ Zeichen, und so erhält man bequemer

$$(1+x)^{-m} = 1 - mx + \frac{m.(m+1)}{1.2}x^2 \ldots$$

$$(-1)^r . \frac{m.(m+1)\ldots(m+r-1)}{1.2\ldots r}x^r \ldots$$ eine Reihe, in welcher auch noch die Abwechselungen der Zeichen wegfallen würden, wenn die Form, welche zur Potenz erhoben wird, im zweyten Theile selbst negativ wäre, oder $(1-x)^{-m}$ seyn sollte.

Auf ähnliche Weise sey der Exponent ein Bruch $n = \frac{p}{q}$. Alsdann werden die einzelnen Factoren, woraus die Zähler der Binomialcoefficienten entspringen, aus einem Bruche, an den sich allmälig als abzuziehend die successiven ganzen Zahlen henken, gebildet. Bringt man die beyden, woraus jeder einzelne Factor besteht, auf einerley Benennung, so bekommt man Brüche, von denen jeder den vorigen Nenner behält, aber im Zähler den Zähler des anfänglichen Exponenten, um die successiven Vielfachen seines Nenners verringert, allmälig aufnehmen muß. In Zeichen: $(1+x)^{\frac{p}{q}} = 1 + \frac{p}{q}x + \frac{p.(p-q)x^2}{1.2.q^2} + \frac{p.(p-q)(p-2q)x^3}{1.2.3.q^3} + \frac{..p..[p-(r-1)q]x^r}{1.2.r.q^r}$.

Diese lezte Formel kann, nach Beschaffenheit des Bruchs, welcher den Exponenten abgibt, sehr verschiedene, noch mehr zusammengezogene Gestalten annehmen. Es sey z. E., welcher Fall besonders häufig vorkommt, der Exponent $-\frac{1}{2}$. Alsdann sind die successiven Vielfachen des Nenners die successiven geraden Zahlen. Der Zähler ist -1, sie geben also, von ihm abgezogen, die successiven ungeraden Zahlen mit dem — Zeichen. Die Producte aus ihnen, das heißt die Zähler der Binomialcoefficienten, sind also Producte aus so vielen von den ersten ungeraden Zahlen, als ihr Index Einheiten hat, positiv oder negativ, je nachdem eben derselbe gerade oder ungerade ist. Der Nenner jedes Binomialcoefficienten ist ein Product

aus so vielen der ersten ganzen Zahlen, als sein Index Einheiten hat, in eben so viele von den Nennern des gegebenen Exponenten, das heißt hier in eben so viele 2. Aber die successiven ganzen Zahlen, jede mit 2 multiplicirt, geben die successiven geraden Zahlen. Und so wird

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3x^2}{2.4} \ldots (-1)^r . \frac{1.3}{2.4} . \frac{(2r-1)x^r}{\ldots 2r}.$$

Für den Zweck würklicher Berechnung ist es freylich am besten, sich die Werthe der Binomialcoefficienten der am häufigsten vorkommenden Potenzen in einer eigenen Tabelle, wie sie am Ende angehenkt ist, niederzulegen.

Neuntes Kapitel.

Der Polynomische Lehrsatz für beliebige Exponenten in independenter und recurrirender Form.

Die allgemeine Aufgabe, eine aus unbestimmt vielen Gliedern zusammengesetzte Form auf die Potenz eines beliebigen Exponenten zu erheben, von welcher die Wurzel-Ausziehung als ein besondrer Fall betrachtet werden kann, löset sich durch Hülfe des binomischen Lehrsatzes sehr leicht auf. Es sey die Form $a + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots$ gegeben, um zur Potenz des Grades n, welcher nun nach Belieben eine positive, negative, ganze, gebrochene Zahl seyn mag,

erhoben zu werden, so daß sich das Resultat in eine auf gleiche Weise fortschreitende Form entwickeln soll. Man behalte ihr Anfangsglied, a, als ersten Theil, bezeichne aber den Inbegriff aller folgenden für den Augenblick durch ein einfaches Zeichen, $\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots; = b$, und man wird $(a + b)^n$ zu berechnen haben, welches durch unmittelbare Anwendung des binomischen Lehrsatzes sogleich geschehen kann. $(a+b)^n = a^n + {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}\, a^{n-1} b^1 + {}^n\overset{2}{\mathfrak{B}}\, a^{n-2} b^2 \ldots {}^n\overset{h}{\mathfrak{B}}\, a^{n-h} b^h \ldots + {}^n\overset{r}{\mathfrak{B}}\, a^{n-r} b^r \ldots$ In den successiven Gliedern dieser Reihe werden die successiven Potenzen von b gefodert, und sie sind es, welche noch einer ferneren Entwicklung bedürfen, da jenes Zeichen nur einstweilig, als Andeutung der Form $\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots$ gebraucht worden ist. Man hat also allmälig alle Potenzen dieser Form, von der ersten an, zu den successiv höheren hinauf, zu berechnen, jede mit dem vor ihr stehenden Factor aus der binomischen Entwicklung zu multipliciren, und alle diese einzelnen Reihen in eine Summe zusammenzuziehn. Zu einer solchen Berechnung aber sind wir durch die schon ausführlich abgeleiteten Regeln der Multiplication vollkommen ausgerüstet. Wenn eine Form, wie die angegebene, auf die Potenz eines ganzen und positiven Exponenten erhoben werden soll, so bildet sich eine ähnliche Form, in deren niedrigstem Gliede die Hauptgröße, auf den Grad der gefoderten Potenz selbst erhoben, wieder

erscheint; in deren folgenden allmälig die nächsthöheren auftreten. Die Coefficienten sind Inbegriffe von Combinationsformen, die sich aus denen der Grundform als ihren Elementen bilden; sie gehören sämtlich der Classe, welche durch den Grad der zu berechnenden Potenz angegeben wird, und der Summe, welche der Exponent der in jedem einzelnen Gliede vorkommenden Potenz andeutet. Jede einzelne Form muß mit ihrer Versetzungszahl multiplicirt werden. Dem gemäß läßt sich der Gang aller dieser Entwicklungen sehr leicht folgendermaßen andeuten

Es entspringt

$$\begin{array}{ll}
\text{aus} & \text{die Reihe} \\
a^{n} & a^{n} \\
{}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1}b & {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1}({}^{1}\overset{1}{C}x^{1} + {}^{2}\overset{1}{C}x^{2} + {}^{3}\overset{1}{C}x^{3}. + {}^{r}\overset{1}{C}x^{r}..) \\
{}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{n-2}b^{2} & {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{n-2}(\qquad {}^{2}\overset{2}{C}x^{2} + {}^{3}\overset{2}{C}x^{3} .. {}^{r}\overset{2}{C}x^{r}..) \\
{}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}a^{n-3}b^{3} & {}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}a^{n-3}(\qquad\qquad {}^{3}\overset{3}{C}x^{3} .. {}^{r}\overset{3}{C}x^{r}..) \\
. & \\
{}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}}a^{n-r}b^{r} & {}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}}a^{n-r}(\qquad\qquad\qquad {}^{r}\overset{r}{C}x^{r}..)
\end{array}$$

und es ist die Summe aller dieser Reihen, welche das Gesuchte in gesetzmäßiger Gestalt darstellen wird.

Am bequemsten zieht man das Resultat der ganzen Entwicklung sogleich in ein allgemeines Glied zusammen, indem man die Frage aufwirft, aus was für Theilen der Coefficient eines beliebig gewählten Gliedes z. E. des r^{ten}, welches x^{r} enthalten wird, in der zulezt hervorgehenden Form seyn müsse. Nun

gibt offenbar jedes Glied der binomischen Reihe, vom ersten nach dem anfänglichen an, bis zum r^{ten} hinauf, wenn man in ihm für b seinen Werth setzt, und es alsdann entwickelt, einen Theil, welcher in x^r multiplicirt seyn wird; man darf also, vorausgesetzt, daß h irgend eine ganze Zahl, kleiner als r bedeutet, behaupten, daß der h^{te} unter den Theilen, welche in jene Potenz der Hauptgröße multiplicirt werden müssen, aus den h^{ten} Gliede der binomischen Reihe, indem es sich entwickelt, und dasjenige Glied dieser Entwicklung, welches in eben diese Potenz der Hauptgröße multiplicirt ist, hergibt, genommen werden müsse. Nun ist das h^{te} Glied der binomischen Reihe

${}^{n}\overset{h}{\mathfrak{B}} a^{n-h} b^h = {}^{n}\overset{h}{\mathfrak{B}} a^{n-h} (\overset{1}{a} x^1 + \overset{2}{a} x^2 \ldots)^h$, und

wenn von $(\overset{1}{a} x + \overset{2}{a} x^2 \ldots)^h$ das Glied gefodert wird, worin x^r vorkommt, so ist es $p^r \overset{h}{C} x^r$. Man versehe es mit dem Factor, welcher in der binomischen Reihe neben der zu entwickelnden Potenz steht, und man hat den h^{ten} Theil von denen, welche nach vollendeter Rechnung zu x^r gehören werden, das heißt, den h^{ten} Theil des ganzen Coefficienten von $x^r = {}^{r}\overset{h}{\mathfrak{B}} a^{n-h} p^r \overset{h}{C}$. Man braucht in diesem unbestimmten Ausdrucke nur für h allmälig alle Werthe von 1 an bis r hin, zu setzen, um alle Theile zu erhalten, woraus sich der gefoderte Coefficient des r^{ten} Gliedes erzeugen wird. Es mag das Zeichen Σ, vor einen, aus unbestimmten Zahlen gebildeten Ausdruck gesetzt, andeuten, daß für

eine jener Zahlen allmälig successive ganze Zahlen substituirt und die daraus hervorgehenden speciellen Werthe in eine Summe zusammengezogen werden sollen. Die unbestimmte Zahl, welche sich specialisiren soll, mag zur Seite daneben, und unter ihr die erste und lezte der ganzen Zahlen gesetzt werden, in welche sie sich allmälig verwandeln soll, so daß z. E. ${}^{1\,..\,r}\overset{h}{\Sigma}$ bedeutet, es soll in einem Ausdrucke für h allmälig jede ganze Zahl von 1 an, bis r hinauf, inclusive, gesetzt, und alle seine daraus hervorgehenden bestimmten Werthe in eine Summe zusammengezogen werden. Durch Hülfe dieses Zeichens kann das allgemeine Gesetz des polynomischen Satzes in folgende Formel zusammengezogen werden.

Die Größe $(a + \overset{1}{a} x^1 + \overset{2}{a} x^2 \,..\, + \overset{r}{a} x^r \,..)^n$, entwickelt sich, was auch der Exponent seyn möge, in eine nach Potenzen von x fortschreitende Form, von welcher, vorausgesetzt daß die nachfolgenden Coefficienten der Grundform, $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}$ .. als combinatorische Elemente; die daraus gebildeten Complexionen als Producte aus diesen Elementen; ihr Inbegriff als Summe angesehn wird, allgemein das r^{te} Glied $({}^{1\,..\,r}\overset{h}{\Sigma}\, {}^{n}\overset{h}{\mathfrak{B}}\, a^{n-h}\, p\, {}^{r}\overset{h}{C})\, x^r$ seyn wird.

Es kommt also, bey würklicher Rechnung nach dieser Formel, die Hauptsache darauf an, alle Combinationsformen, welche der nemlichen Summe angehören, (denn r bleibt immer dasselbe, solange der Coefficient eines bestimmten Gliedes berechnet wird) für alle

möglichen Classen (denn h nimt allmälig alle Werthe von 1 bis r an) vollständig zu entwerfen. Es bedarf zu dieser Absicht keiner andern Regeln, als der schon im Vorhergehenden vorgekommenen, durch deren Hülfe sich allmälig für jede Classe, von der ersten an, bis zu der höchsten hinauf, die der gefoderten Summe gehörigen Formen finden lassen. Da es indessen nicht nothwendig ist, die arithmographische Ordnung zu beobachten, sondern hier in der Entwicklung der Formen ebensogut die lexicographische gebraucht werden darf, so könnte in der That eine Menge von verschiedenen combinatorischen Regeln für die gefoderte Operation gegeben werden, wenn es sich überall für die Zwecke der Analysis der Mühe verlohnte *m*).

---

m) Man hat sich in der That, nicht bloß bey den neueren Bearbeitungen der Combinationslehre, sondern schon früher, mit mancherley Regeln für die Bildung aller Combinationsformen, die zu einer bestimmten Summe gehören, beschäftigt. Die meisten dieser Regeln sind combinatorisch recurrirend, oder involutorisch; man findet z. E. vermöge ihrer aus allen Formen, die einer gewissen Summe angehören, durch Vorsetzen neuer Elemente, und Austauschen anderer, diejenigen vollständig, welche zur nächst höheren Summe gerechnet werden müssen. In einer umfassenden theoretischen Darstellung der reinen Combinationslehre mögen solche Untersuchungen ihren Werth haben, für die würkliche Rechnungen besitzen sie ihn nicht, und man scheint beynahe vergessen zu haben, daß unsre Buchstaben-Ausdrücke nur Andeutungen von Rechnungen sind, und daß Recursionen unter solchen Andeutungen, die nicht

Sind die einzelnen Combinationsformen entwickelt, so versehe man jede von ihnen mit der ihr gebühren-

---

mit Recursionen der durch sie berechneten bestimmten Zahlen zusammenfallen, für die Analysis als sehr unnütz betrachtet werden müssen. Was den einzelnen Formen, aus deren Inbegriff ein gewisser Coefficient erwachsen ist, abgenommen oder zugefügt werden müßte, damit statt seiner der nächstfolgende Coefficient zum Vorschein käme, zu wissen, erleichtert die würkliche Berechnung sehr wenig; es würde fast unerträglich seyn, wenn bey würklicher Potenziirung einer gegebenen Form, viele von den successiven Gliedern des Resultats auf diesem Wege berechnet werden sollten. Die wahre, brauchbare analytische Recursion gibt allemal eine Regel, um aus den vollständigen Werthen früher berechneter Coefficienten allmälig jeden nachfolgenden zu finden. Und dazu kann, wenigstens für den Fall des polynomischen Lehrsatzes, keine jener bloß combinatorischen Regeln behülflich seyn. Höchstens da, wo es darauf ankäme, für mehrere der successiven Coefficienten die einzelnen Producte, aus deren Zusammenfassen sie sich bilden sollen, anzudeuten, können sie mit Nutzen gebraucht werden. Und so mag hier die eine oder andre von den dazu behülflichen Vorschriften eine Stelle finden. Um aus allen Combinationsformen zu einer gewissen Summe die zur nächsthöheren zu finden, setze man ihnen allen 1 vor, und vertausche außerdem in allen, die es ohne Unordnung gestatten, das Anfangselement mit dem nächsthöheren. Oder man nehme allmälig alle Elemente, und setze sie hinter alle Complexionen aus den Elementen, welche nicht niedriger sind als sie, und zu einer Summe gehören, die durch sie selbst zu der gefoderten ergänzt wird.

den Permutationszahl, realisire diese Producte aus den gegebenen Elementen, und addire zunächst nur diejenigen, welche zu der nemlichen Classe gehören, in eine Summe zusammen. Denn der Inbegriff dieser Formen bekommt einen gemeinschaftlichen Factor, aus einer bestimmten Potenz vom Anfangsgliede der gegebenen Grundform, und einem Binomialcoefficienten dessen Rang und Zahl gleichfalls vorgeschrieben ist, durch Multiplication erzeugt. Eben darum ist es, wenn ein einzelnes Glied von der Potenz eines Polynomiums gefodert werden sollte, immer am bequemsten die Combinationsformen in keiner andern als der arithmographischen Ordnung zu entwickeln. Die übrigens bey der Berechnung zu beobachtende Ordnung findet sich von selbst aus der Grundformel *n*).

---

n) Sollte z. E. von $(4 + 2x + 5x^2 - 3x^3 + 6x^4 \ldots)^{\frac{1}{2}}$ das 4te Glied nach dem anfänglichen berechnet werden, so hätte man, vorausgesetzt, daß die Elemente $\underset{2}{\overset{1}{a}}, \underset{5}{\overset{2}{a}}, \underset{-3}{\overset{3}{a}}, \underset{6}{\overset{4}{a}}$, und $\underset{4}{a}$ bedeuten, $({}^{1 \cdot \cdot 4}\Sigma\, {}^{\frac{1}{2}}\overset{h}{\mathfrak{B}}\, a^{\frac{1}{2}-h}\, \overset{h}{p}{}^{4}\, C)x^4$ zu berechnen

Nun ist

$$\begin{array}{l|l|l|l} {}^{\frac{1}{2}}\overset{1}{\mathfrak{B}} = \frac{1}{2} & {}^{\frac{1}{2}}\overset{2}{\mathfrak{B}} = -\frac{1}{8} & {}^{\frac{1}{2}}\overset{3}{\mathfrak{B}} = +\frac{1}{16} & {}^{\frac{1}{2}}\overset{4}{\mathfrak{B}} = -\frac{5}{128} \\ 4^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} & 4^{\frac{1}{2}-2} = \frac{1}{8} & 4^{\frac{1}{2}-3} = \frac{1}{32} & 4^{\frac{1}{2}-4} = \frac{1}{128} \\ \hline {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1} = \frac{1}{4} & {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{n-2} = \frac{1}{64} & {}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}a^{n-3} = \frac{1}{512} & {}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}}a^{n-4} = -\frac{5}{16384} \end{array}$$

Der Ausdruck des ganzen Gesetzes vereinfacht sich noch etwas, wenn man, was mit einer leichten Modification bekanntlich immer geschehn kann, das Anfangsglied der Grundform 1 seyn läßt. Denn alsdann können die Potenzen des Anfangsgliedes allenthalben, wo sie als Factoren vorkommen, weggelassen werden; es wird also von der Reihe, welche aus $(1 + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \, .. + \overset{r}{a}x^r \, ..)^n$ entspringt, das rte Glied seyn $(^{1 \cdot \cdot r}\sum{}^n\overset{h}{\mathfrak{B}}\, p^{\overset{h}{1}}\overset{h}{C})\, x^r$.

Man berechne also ferner

$$p^4\overset{1}{C} = 4 \text{ realisirt } 6$$

$$\text{multipl. mit } {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}\, a^{n-1} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{6}{4} = +\frac{6}{4}$$

$$p^4\overset{2}{C} = 2)\ 13 - 12$$

$$22 \quad + 25$$

$$+ 13$$

$$\text{multipl. mit } {}^n\overset{2}{\mathfrak{B}}\, a^{n-2} = -\frac{1}{64}$$

$$-\frac{13}{64} = \qquad -\frac{13}{64}$$

$$p^4\overset{3}{C} = 3)\ 112 - 60$$

$$\text{multipl. mit } {}^n\overset{3}{\mathfrak{B}}\, a^{n-3} = \frac{1}{512} = +\frac{60}{512}$$

$$+\frac{60}{512}$$

$$p^4\overset{4}{C} = 1111 - 16$$

$$\text{multipl. mit } {}^n\overset{4}{\mathfrak{B}}\, a^{n-4} = -\frac{5}{16384}$$

$$-\frac{5}{1024} = \qquad -\frac{5}{1024}$$

$$\text{Summe } \frac{828}{512} - \frac{213}{1024} = \frac{1443}{1024}$$

Mithin das gesuchte Glied $\frac{1443}{1024}x^4$.

Will man hingegen die Gestalt der Grundform so erweitern, daß die Exponenten in ihr überhaupt nur eine arithmetische Progression bilden, so hat dies auf unsre erste Formel nur geringen Einfluß. Denn man kann statt $(ax^{\beta} + \overset{1}{a}x^{\beta+\delta} + \overset{2}{a}x^{\beta+2\delta}\,..)^{n}$ setzen $x^{\beta n}(a + \overset{1}{a}x^{\delta} + \overset{2}{a}x^{2\delta}\,..)^{n}$. Deutet man in der eingeklammerten Größe x^{δ} augenblicklich durch u an, so wird sie $(a + \overset{1}{a}u^{1} + \overset{2}{a}u^{2}\,..)^{n}$, unsre Anfangs betrachtete Form, deren r^{tes} Glied $(\overset{h}{{}^{1\cdots r}\Sigma}{}^{n}\overset{h}{\mathfrak{B}}a^{n-h}p^{r}\overset{h}{C})u^{r}$ ist. Setzt man in ihm für u seinen Werth zurück, so erhält man statt u^{r}, $x^{r\delta}$; fügt man den vorhin abgesonderten Factor $x^{\beta n}$ wieder bey, so ergibt sich das r^{te} Glied der Reihe $(ax^{\beta} + \overset{1}{a}x^{\beta+\delta}\,...)^{n}$ $= (\overset{h}{{}^{1\cdots r}\Sigma}{}^{n}\overset{h}{\mathfrak{B}}a^{n-h}p^{r}\overset{h}{C})x^{\beta n+r\delta}$ wobey also die Regel für die Berechnung des Coefficienten ganz die vorige bleibt. Man hat nur in Absicht auf die Potenzen, die in den einzelnen Gliedern vorkommen, zu bemerken, daß sie nach derselben Progression, wie die der Grundform fortschreiten, und der des Anfangsgliedes gefunden wird, wenn man den, welchen die Grundform im Anfangsgliede führt, mit dem Grade der Potenz multiplicirt, worauf die Grundform selbst erhoben werden soll.

Der erste Hauptheil von den Betrachtungen, welche die Berechnung beliebiger Potenzen eines einfach gesetzmäßigen Polynomiums betreffen, der independenten

Bestimmung jedes Coefficienten in der sich dabey entwickelnden Form gewidmet, ist in der vorhergehenden Ableitung enthalten. Aber sowohl die Vollständigkeit der Theorie, als die Bequemlichkeit der würklichen Berechnung verlangt noch eine recurrirende Bestimmung, die uns in den Stand setzt, aus schon bekannten Werthen früherer Glieder in eben derselben jedes nachfolgende abzuleiten. Wir wollen versuchen von jener ersten zu dieser lezten den Uebergang zu finden.

Als in der Lehre von der Division für den Quotienten $\frac{1}{(1 - \overset{1}{a}x - \overset{2}{a}x^2 \ldots \overset{r}{a}x^r \ldots)}$ der Werth gesucht wurde, erhielten wir zuerst, den Quotienten durch $A + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x \ldots + \overset{r}{A}x^r \ldots$ andeutend, die Recursionsformel $\overset{r}{A} = \overset{1}{a}\overset{1-1}{A} + \overset{2}{a}\overset{r-2}{A} \ldots + \overset{k}{a}\overset{r-k}{A} \ldots + \overset{r}{a}A$. Daraus leiteten wir nachher die independente Regel ab, welche in unsrer jetzigen abgekürzten Bezeichnung durch $(\overset{h}{1} \cdots {}^{r}\Sigma\, p^r \overset{h}{C}) = \overset{r}{A}$ angedeutet werden kann.

Gegenwärtig haben wir, wenn die aus $(a + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots)^n$ entspringende Reihe durch $A + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 \ldots + \overset{r}{A}x^r \ldots$ bezeichnet wird für $\overset{r}{A}$ den independenten Werth $(\overset{h}{1} \cdots {}^{r}\Sigma\, {}^{n}\overset{n}{\mathfrak{B}}\, a^{n-h}\, p^r \overset{h}{C})$, und fragen rückwärts nach einer Recursionsformel, woraus er entspringen könnte.

Es ist offenbar eine große Aehnlichkeit zwischen dem letzten independenten Ausdruck, und jenem bey der Division betrachteten. Wäre der Factor ${}^{n}\overset{h}{B} a^{n-h}$ nicht in diesem, das heißt, sollten die permutirten Combinationsformen nicht mit einem Binomialcoefficienten der gefoderten Potenz, dessen Zahl ihre Classe bestimmt, und einer gleichfalls davon abhängenden Potenz des ersten Coefficienten der Grundform multiplicirt werden, so fiele er mit jenem völlig zusammen, und es würde hier die vorige Recursionsformel $\overset{r}{A} = \overset{1}{a}\overset{r-1}{A} .. + \overset{k}{a}\overset{r-k}{A} .. + \overset{r}{a} A$ gleichfalls gültig seyn. Indessen ist die Frage gewiß sehr natürlich: sollte nicht, da ein in der Größe $\overset{r}{A}$ vorhandener Factor das Einzige ist, welches verhindert sich zu ihrer recurrirenden Bestimmung dieser Formel zu bedienen, dadurch, daß jeder der vorhergehenden Größen im Recurriren ein eigner Factor beygegeben würde, mit Beybehaltung der übrigen Formel das Gesuchte geleistet werden können, mithin, wenn unter $\overset{1}{f}, \overset{2}{f}, \overset{k}{f}, ..$ solche, noch unbestimmte Factoren zu verstehn wären, vermöge einer Formel wie $\overset{r}{A} = \overset{1}{f}\overset{1}{a}\overset{r-1}{A} + \overset{2}{f}\overset{2}{a}\overset{r-2}{A} .. + \overset{k}{f}\overset{k}{a}\overset{r-k}{A} .. + \overset{r}{f}\overset{r}{a} A$, sich die Beziehung unter den successiven Coefficienten darstellen lassen?

Wir nehmen zu dieser Absicht irgend eine, mit ihrer Permutationszahl und dem anderweitig ihr gebührendem Factor versehene Combinationsform aus $\overset{r}{A}$

heraus, um zu fragen, welchen Antheil die schon bekannten vorhergehenden Größen, $\overset{r-1}{A}, .. \overset{r-k}{A}, .. A$, wenn sie auf jene fingirte Art zur Bildung von $\overset{r}{A}$ gebraucht seyn sollen, daran gehabt haben müssen. Eine mit ihrer Permutationszahl versehene Combinationsform bedeutet eigentlich einen vollständigen Inbegriff aller Variationsformen aus den Elementen, die sie enthält. Einige dieser Variationsformen werden $\overset{1}{a}$ an der Spitze führen; sie sind also aus $\overset{1}{f}\,\overset{1}{a}\,\overset{r-1}{A}$ entstanden; allgemein, die Variationsformen des hervorgehobenen Inbegriffs, welche das Element $\overset{k}{a}$ an der Spitze führen, müssen bey der Recursion aus $\overset{k}{f}\,\overset{k}{a}\,\overset{r-k}{A}$ entstanden seyn. Nun bedeute N die Permutationszahl der angenommenen Combinationsform, die unbestimmt von der Classe m seyn mag, und es komme in ihr das genannte Element $\overset{k}{a}$, π mal vor, so daß also, wenn man für k und π allmälig alle auf die Elemente der Form passenden Werthe setzt, die Summe aller π, in Zeichen $\Sigma\pi = m$ sey, und eben so die Summe aller Producte wie $k\pi$, in Zeichen $\Sigma k\pi = r$ seyn muß. Alsdann ist offenbar die Anzahl aller Variationsformen, die $\overset{k}{a}$ an der Spitze führen können $\frac{\pi N}{m}$, und sie alle, in eine Combinationsform zusammengezogen, welche diese Zahl $\frac{\pi N}{m}$

als Permutationszahl bey sich führt, sind aus $\overset{r-k}{A}$ hergenommen. Aber da haben sie, wegen der Recursion die wir [illegible]etzen, den Factor $\overset{k}{f}$, und weil sie von der m – 1ten Classe sind, dem independenten Gesetze gemäß, noch außerdem den Factor ${}^{n}\overset{m-1}{\mathfrak{B}}\, a^{n-(m-1)}$ bekommen. Es muß folglich, wenn man in dem Producte aus den angegebenen Factoren $\frac{\pi N}{m} . \overset{k}{f} . {}^{n}\overset{m-1}{\mathfrak{B}} . a^{n-(m-1)}$ für k und π allmälig alle möglichen Werthe an die Stelle setzt, eben der Factor herauskommen, welchen die angenommene Combinationsform in A bey sich führt, das heißt, da sie von der nten Classe seyn sollte, ${}^{n}\overset{m}{\mathfrak{B}} . a^{n-m} N$. In Zeichen, es muß

$$\Sigma \left(\frac{\pi N}{m} . \overset{k}{f} . {}^{n}\overset{m-1}{\mathfrak{B}}\, a^{n-(m-1)} \right) = {}^{n}\overset{m}{\mathfrak{B}}\, a^{n-m} N. \text{ seyn.}$$

Da bey der Summation π und k als veränderlich zu betrachten sind, so können gemeinschaftliche Factoren auf beyden Seiten, worin diese Größen nicht vorkommen, weggelassen werden. Man setze statt ${}^{n}\overset{m}{\mathfrak{B}} = \frac{n-(m-1)}{m}\, {}^{n}\overset{m-1}{\mathfrak{B}}$, so kann $\frac{N}{m}\, {}^{n}\overset{m-1}{\mathfrak{B}}\, a^{n-(m-1)}$ hier und dort gehoben werden, und die Formel zieht sich auf $\Sigma \pi \overset{k}{f} = \frac{[n-(m-1)]}{a}$ zusammen.

Und nun kehrt die eigentliche Frage zurück: läßt sich wohl ein Werth für $\overset{k}{f}$ angeben, der aber von m unabhängig ist, also für alle Formen, von welcher

Classe sie auch seyn mögen, solange nur r und n dieselben bleiben, ungeändert gelassen werden darf, so daß würklich jene gefoderte Beziehung herauskommt.

Die Summe der Producte aus π in $\overset{k}{f}$, vorausgesetzt daß π und k alle möglichen zusammengehörigen Werthe annehmen, soll eigentlich drey Theile $\frac{n}{a}$, $-\frac{m}{a}$, $+\frac{1}{a}$ hervorbringen. So muß der Factor $\overset{k}{f}$ dreytheilig $= \beta + \gamma + \delta$ seyn. Sein erster Theil soll $\Sigma(\pi\beta) = \frac{n}{a}$ geben; es muß also, $\beta = \frac{nk}{ra}$ seyn, da angenommen ist, daß $\Sigma\pi k = r$, mithin $\Sigma\left(\frac{nk\pi}{ra}\right)$, weil n, r, a, feste Größen sind $= \frac{n}{ra}\Sigma k\pi = \frac{n}{ra} \cdot r = \frac{n}{a}$. Sein zweyter Theil γ muß $= \frac{1}{a}$ seyn, weil $\Sigma\pi = m$ ist, also $\Sigma - \frac{\pi}{a} = -\frac{m}{a}$ seyn wird. Sein dritter Theil endlich, δ, muß $\frac{k}{ra}$ seyn, weil $\Sigma\left(\frac{k\pi}{ra}\right)$ der obigen Annahme zufolge $\frac{r}{ra} = \frac{1}{a}$ geben muß. So ist also

$$f = \beta + \gamma + \delta = \frac{nk}{ra} - \frac{1}{a} + \frac{k}{ra} = \left(\frac{nk - r + k}{ra}\right),$$

offenbar eine Größe die lediglich von n, r und k abhängt, Und es ergibt sich, daß allerdings eine Recursionsformel von der Gestalt möglich ist, wie sie

oben angenommen war. Jeder der vorhergehenden Coefficienten, $\overset{r-1}{A}$,.. $\overset{r-k}{A}$,.. A, muß außer dem Element, welches seine Zahl zu der des gesuchten ergänzt, noch mit einem eigenen Factor multiplicirt werden. Aber die Reihe dieser Factoren ist nicht, wie bey der einfachen Recursion des Dividirens, unabänderlich bestimmt, so daß ihre Größe und Folge die nemliche bliebe, man mögte einen niedrigeren, oder einen höheren Coefficienten bestimmen wollen. Sondern ein jeder von ihnen nimt einen neuen Werth an, und muß besonders wieder berechnet werden, so wie man zur Berechnung eines neuen nächsthöheren Coefficienten fortschreiten will. Dieß erhellet augenblicklich wenn wir in die angenommene Recursionsformel für $\overset{k}{f}$ seinen gefundenen Werth an die Stelle setzen.

Es wird also die allgemeine recurrirende Auflösung des polynomischen Lehrsatzes auf folgende Art ausgedrückt werden können. Wenn $(ax^{\beta} + \overset{1}{a}x^{\beta+\delta} + \ldots \overset{r}{a}x^{\beta+r\delta})^n$ berechnet werden soll, so entsteht eine Reihe, $=$

$$Ax^{n\beta} + \overset{1}{A}x^{n\beta+\delta} + \overset{2}{A}x^{n\beta+2\delta} \ldots \overset{r}{A}x^{n\beta+r\delta} \ldots$$

ihr erster Coefficient ist $A = a^n$; die folgenden können allmälig auseinander durch Hülfe der Formel

$$\overset{r}{A} = \frac{(n-r+1)}{ra}\overset{1}{a}\overset{r-1}{A} + \frac{(2n-r+2)}{ra}\overset{2}{a}\overset{r-2}{A} \ldots$$

$$+ \frac{(kn-r+k)}{ra}\overset{k}{a}\overset{r-k}{A} \ldots + \frac{rn}{ra}\overset{r}{a}A,$$

oder bequemer, wenn man alle Glieder unter den gemeinschaftlichen Nenner stellt,

$$\overset{r}{A} = \frac{(n-r+1)\overset{1}{a}\overset{r-1}{A} + (2n-r+2)\overset{2}{a}\overset{r-2}{A} \ldots + (kn-r+k)\overset{k}{a}\overset{r-k}{A} \ldots + rn.\overset{r}{a}A}{ra}$$

abgeleitet werden.

Die Specialisirung dieser Recursionsformel hat außer der größeren Weitläuftigkeit keine Beschwerde. Sie gibt, allmälig für r die successiven ganzen Zahlen gesetzt

$$\overset{1}{A} = \frac{n.\overset{1}{a}A}{a}$$

$$\overset{2}{A} = \frac{(n-1)\overset{1}{a}\overset{1}{A} + 2n\overset{2}{a}A}{2a}$$

$$\overset{3}{A} = \frac{(n-2)\overset{1}{a}\overset{2}{A} + (2n-1)\overset{2}{a}\overset{1}{A} + 3n\overset{3}{a}A}{3a}$$

$$\overset{4}{A} = \frac{(n-3)\overset{1}{a}\overset{3}{A} + (2n-2)\overset{2}{a}\overset{2}{A} + (3n-1)\overset{3}{a}\overset{1}{A} + 4n\overset{4}{a}A}{4a}.$$

Der Mechanismus, unter welchem sie in fortschreitender Berechnung bequem zu gebrauchen ist, kann leicht gefunden werden *o*).

---

o) Man bilde eine Verticalcolumne für die zu berechnenden Coefficienten, und lasse zur Rechten und zur Linken Platz für eben so viele andre als man Coefficienten verlangt. Die Columnen zur Linken führen an ihren Spitzen die successiven Producte aus dem Exponenten der Potenz in die mit ihrem eigenen Index multiplicirten Elemente; ihre folgenden Glieder bilden sich aus einander durch successives Abziehn des Elements wovon sie ein Vielfaches enthalten; die Zahl ihrer Glieder kann immer um

Aus beyden Regeln für die unbestimmte Potenzirung eines Polynomiums, der independen-

---

Eins abnehmen. Dieser Theil des Schemas kann im allgemeinen so dargestellt werden:

$4n\overset{4}{a}$	$3n\overset{3}{a}$	$2n\overset{2}{a}$	$n\overset{1}{a}$	A
	$(3n-1)\overset{3}{a}$	$(2n-2)\overset{2}{a}$	$(n-1)\overset{1}{a}$	$\overset{1}{A}$
		$(2n-3)\overset{2}{a}$	$(n-2)\overset{1}{a}$	$\overset{2}{A}$
			$(n-3)\overset{1}{a}$	$\overset{3}{A}$

Die Berechnung jedes neuen Coefficienten kostet eine eigne Verticalcolumne zur Rechten. Man multiplicire, von unten aufsteigend, jeden der schon vorhandenen Coefficienten mit der Zahl aus den zur Linken stehenden Columnen, welche sich in einer, von der untersten diagonal durch sie aufwärts gezogenen Linie, horizontal neben ihm befindet. Die Producte schreibe man, in der Horizontale ihrer Factoren, unter einander. Ihre Summe, durch den mit der Zahl des gesuchten Coefficienten multiplicirten Anfangscoefficienten der Grundform dividirt gibt den neuen nächstfolgenden Coefficienten. So würde für die Berechnung von $\overset{4}{A}$, die dem obigen Schema zur Rechten anzufügende Verticalcolumne

A	. . .	$4n\overset{4}{a}A$
$\overset{1}{A}$		$(3n-1)\overset{3}{a}\overset{1}{A}$
$\overset{2}{A}$		$(2n-2)\overset{2}{a}\overset{2}{A}$
$\overset{3}{A}$		$(n-3)\overset{1}{a}\overset{3}{A}$
		Summe
$\overset{4}{A}$	=	$:4a$

Das nachfolgende Beyspiel ist nach diesem Schema berechnet. Es sollen von der Reihe die aus

ten sowohl als der recurrirenden, erhellet, daß jeder Coefficient des Resultats zu seiner Bildung gerade eben so viele von den Coefficienten der Grundform erfodert, als seine Zahl Einheiten hat. Diese Bemerkung ist wichtig, sobald die Form, welche potenziirt werden soll, selbst erst durch entwickelnde arithmetische Operationen gefunden werden muß, und macht einen wesentlichen Theil von dem Beweise des allgemeinen Satzes aus, daß überhaupt Formen, mit denen man rechnet, nur bis zu dem Grade entwickelt zu seyn brauchen, bis zu welchem das aus ihnen abzuleitende Resultat getrieben werden soll.

Besteht das Polynomium aus einer bestimmten Anzahl von einzeln gegebenen Gliedern, so kann man bey seiner Potenziirung ihm selbst vorläufig die steigende

---

$(4 + 2x + 5x^2 - 3x^3 + 6x^4)^{\frac{1}{2}}$ entspringt, die 5 ersten Glieder berechnet werden. Hier ist $n = \frac{1}{2}$, $\underset{4}{a}, \underset{2}{\overset{1}{a}}, \underset{5}{\overset{2}{a}}, \underset{-3}{\overset{3}{a}}, \underset{6}{\overset{4}{a}}$ .. und die Berechnung hat folgende Gestalt:

$4n\overset{4}{a}$	$3n\overset{3}{a}$	$2n\overset{2}{a}$	$n\overset{1}{a}$		$\overset{1}{A}$	$\overset{2}{A}$	$\overset{3}{A}$	$\overset{4}{A}$
12	$-\frac{9}{2}$	5	1	2	2	10	$-\frac{18}{2}$	$+24$
	$-\frac{3}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}$	$:4$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$
		-5	-3	$\frac{19}{16}$		$\frac{19}{2}$	$-\frac{57}{16}$	$-\frac{95}{16}$
						$:8$	$\frac{201}{16}$	$+\frac{335}{64}$
			-5	$-\frac{67}{64}$			$:12$	$\frac{1443}{64}$
				$\frac{1443}{1024}$				$:16$

Es ist also die gesuchte Form $2 + \frac{1}{2}x + \frac{19}{16}x^2 - \frac{67}{64}x^3 + \frac{1443}{1024}x^4 \ldots$

oder fallende Anordnung geben, mithin für das Resultat im ersten Falle eine steigende, im zweyten eine fallende Form erhalten. Beyde sind nur dann identisch, wenn der Grad der Potenz eine ganze positive Zahl ist, in welchem Falle die eine mit der andern, rückwärts gelesen, zusammenfallen wird. Ist hingegen der Exponent der Potenz ein Bruch, so werden sie, ungeachtet die Entwicklung der nemlichen Größe sie erzeugt, in dem Bau ihrer einzelnen Glieder, immer, die potenziirende Form mag abbrechen, oder als unbestimmt fortschreitend gedacht werden, durchaus verschieden seyn. Dies erhellet schon daraus, weil nur im ersten Falle die gefoderte Potenz durch eine endliche und vollkommen geschlossene Reihe dargestellt werden kann. Sobald der Exponent eine negative oder gebrochene Zahl ist, kann die gefoderte Potenzirung nie genau und vollständig geleistet werden; man muß sich begnügen, eine Form zu finden, die den Foderungen der vorgegebenen Operation Genüge leistet, so fern man auf das, was über einen gewissen Grad hinausgeht, keine Rücksicht bey der Rechnung nehmen will. Es ist, um bey dem nachherigen Gebrauche dieser allgemeinen Regeln, in Beziehung auf Näherungen die sie gestatten, keine unrichtige Idee zu fassen, sehr wesentlich, ihre eigentliche Bedeutung in dieser Rücksicht deutlich zu begreifen. Soll eine Grundform auf die Potenz eines ganzen negativen Exponenten erhoben werden, $(a + \overset{1}{a} x^1 + \overset{2}{a} x^2 \ldots + \overset{r}{a} x^r)^{-n}$, so muß man

in völliger Strenge, die Foderung für unmöglich erklären; was gegeben seyn soll, muß Anfang und Ende haben, und eine endliche Form, die das verlangte Resultat darstellte, läßt sich nicht aussindig machen. Will man aber eine Form haben, die bis zu einem willkührlich gewählten Grade hinauf, mag er so hoch seyn, als man verlangt, der Forderung jenes Ausdrucks Genüge leistet, so kann man dies allerdings. Wenn z. E. $(a + \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots)^{-n}$ durch die Vorschriften des polynomischen Lehrsatzes bis zum m^{ten} Grade entwickelt, $A + \overset{1}{A}x^1 \ldots + \overset{m}{A}x^m$ gefunden wird, so bedeutet dies eigentlich, daß diese Form, zur Potenz des Grades $+n$ erhoben, in der That die Anfangs gegebene $(a + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r)$, so fern man bey der Vergleichung nur bis auf die Glieder des m^{ten} Ranges inclusive fortschreiten will, hervorbringt. Es ist also eigentlich nicht gestattet, sich des Gleichheitszeichens zwischen dem Ausdrucke der Potenz, welche sich entwickeln soll, und der daraus hervorgehenden Form zu bedienen, und etwa, wie gewöhnlich zu geschehen pflegt $(a + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots)^{-n} = A + \overset{1}{A}x^1 \ldots + \overset{m}{A}x^m$ zu setzen. Eben so wenig hilft es, wenn man etwa das würklich Entwickelte nur als einen Anfang der ganzen Arbeit betrachten, und durch ein nachfolgendes $+\ldots$ zu verstehn geben wollte, daß an dem aufgestellten Resultate nur noch Etwas, der Entwicklung nicht Unterzogenes fehle. Denn was sich in einer vorgeschrie-

benen Gestalt gar nicht darstellen läßt, davon kann man auch nicht den Anfang der Darstellung geben. Will man die gefundene Form würklich als Resultat einer Potenziirung ansehn, und das Gleichheitszeichen bewahren, so muß man sich gefallen lassen, daß die zu entwickelnde Größe selbst geändert werde. Es kann nur dann $(a + \overset{1}{a}x^1 + .. + \overset{r}{a}x^r)^{-n} = A + \overset{1}{A}x^1 + \overset{2}{A}x^2 .. + \overset{m}{A}x^m$ gesetzt werden, wenn es gestattet ist, der Größe $(a + \overset{1}{a}x^1 + .. + \overset{r}{a}x^r)^{-n}$ eine andre beyzufügen, welche von nächsthöherem Grade ist, wie das entwickelte Resultat, so daß, wenn wir eine solche durch $\overset{1}{\alpha}x^{m+1} + \overset{2}{\alpha}x^{m+2} .. + \overset{mr}{\alpha}x^{mr}$ andeuten wollen, die Gleichung nur in dieser Gestalt $(a + \overset{1}{a}x^1 .. + \overset{r}{a}x^r)^{-n} - (\overset{1}{\alpha}x^{m+1} .. + \overset{mr}{\alpha}x^{mr}) = A + \overset{1}{A}x^1 .. + \overset{m}{A}x^m$ bestehn kann.

Auf eine ähnliche Weise, wenn eine Potenz mit gebrochenem positiven Exponenten entwickelt werden soll, und das Resultat nach der Formel des polynomischen Lehrsatzes bis zu einem gewissen Grade getrieben ist, $(a + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 ..)^{\frac{m}{n}} = A + \overset{1}{A}x^1 .. + \overset{p}{A}x^p$ darf das Gleichheitszeichen nicht gebraucht werden, wenigstens nicht im Allgemeinen, weil gewiß nicht, wenige Fälle abgerechnet, $(a + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 ..)^m = (A + \overset{1}{A}x .. + \overset{p}{A}x^p)^n$ seyn wird. Nur bis zum Grade p werden beyde Formen zusammenstim-

men, von da an aber abweichend von einander erscheinen, so daß also das Gleichheitszeichen nur dann bestehen kann, wenn man sich gestatten will, in dem Ausdruck auf die eine Seite eine Form, welche den Grad, bis zu welchem die Entwicklung gegangen ist, überschreitet, hinzuzufügen.

$$[(a + \overset{1}{a} x^1 + \overset{2}{a} x^2 \,.\,.)^m - (\overset{1}{a} x^{p+1} + \overset{2}{a} x^{p+2} \,.\,.)]^{\frac{1}{n}}$$
$$= A + \overset{1}{A} x^1 \,.\,. + \overset{p}{A} x^p.$$

Es ist indessen keinesweges nöthig, diese Formen, welche dem zu entwickelnden Ausdrucke eigentlich beygefügt werden müssen, damit die Gleichheit zwischen ihm und dem Resultate der Entwicklung bestehe, jedesmal ausdrücklich beyzufügen. Aber man muß es sich im Allgemeinen bemerken, daß die Resultate, welche aus der Anwendung des polynomischen Lehrsatzes hervorgehn, nur dann als richtig angesehn werden dürfen, wenn es gestattet ist, in den Ausdrücken, woraus sie entstehn, Formen von nächsthöherem Grade als derjenige hinzuzufügen, bis zu welchem die Entwicklung getrieben ist. Diese hinzuzufügenden Formen ließen sich jedesmal durch würkliche Rechnung bestimmen, aber es mögte kaum ein Fall vorkommen, wo ihre genaue Kentniß erfoderlich wäre. Bey allen Näherungsrechnungen aber gibt es würklich einen Grad, von welchem an die Formen sich der Betrachtung entziehn, so daß dasjenige, was ihn überschreitet, als gar nicht vorhanden angesehn, mithin andern bestimmbaren Formen nach Belieben beygefügt, oder

abgenommen werden kann. Und so sieht man leicht im Allgemeinen, inwiefern unsre Formeln, auf bestimmte Zahlen in reeller Größen Berechnung angewendet, sich brauchbar machen lassen: ein Gegenstand, dessen Erörterung nicht an diese Stelle gehört.

Die Regeln für die vier arithmetischen Operationen, verbunden mit dem polynomischen Lehrsatze, welcher Potenzirungen, Divisionen durch Potenzen, und Wurzelausziehungen in eine Formel zusammenfaßt, machen es möglich, jeden algebraischen Ausdruck, das soll heißen jeden, welcher sich aus Grundformen durch bestimmte arithmetische Operationen der genannten Art, wobey aber die Exponenten der etwanigen Potenzirungen nicht selbst die Hauptgröße der Formen auf irgend eine Weise enthalten dürfen, zu entwickeln, so daß das endliche Resultat selbst wieder als eine ähnliche Form, welche nach Potenzen der nemlichen Hauptgröße fortschreitet, erscheinen muß. Und wir dürfen, gestützt auf die Fundamentalregeln, durch deren Hülfe alle jene Rechnungen vollzogen werden müssen, hinzufügen, daß, wenn die Formen, welche bey der Rechnung als die Elemente derselben angenommen oder gegeben sind, in den Exponenten der Potenzen, welche ihre einzelnen Glieder enthalten, die nemliche arithmetische Progression in Absicht auf die Differenzen der Exponenten beobachten, diejenige, welche aus allen Entwicklungen zuletzt hervorgeht, in den Exponenten ihrer successiven Potenzen noch immer

den nemlichen Fortschritt bewahren wird. Sind die Formen, womit man rechnet, von der Gestalt $ax^{\alpha} + bx^{\beta + \delta} + cx^{\alpha + 2\delta} \ldots$, so wird das lezte Resultat der Rechnung von der ähnlichen Gestalt $Ax^{\beta} + Bx^{\beta + \delta} + Cx^{\beta + 2\delta} \ldots$ seyn.

Uebrigens eröffnet die Kentniß dieser formalen Regeln ein unendliches Feld realer arithmetischen Untersuchungen. Bestimmte Formen angenommen; bestimmte Rechnungen an und mit ihnen vollzogen, müssen bestimmte Resultate hervorgehn. Aber solche Untersuchungen gehören nicht in das Gebiet der allgemeinen Arithmetik.

Zehntes Kapitel.

Entwicklung der Exponenzialgrößen.

Die Form der Potenz ist noch einer ganz andren Ansicht fähig, als diejenige, welche bey ihrer Entwicklung durch den binomischen oder polynomischen Lehrsatz zum Grunde gelegt wurde. Wir haben nemlich im Vorhergehenden die Hauptgröße, nach deren Potenzen folglich die Entwicklung fortschreiten mußte, in den Grundfactor, oder die Wurzel der Potenz übertragen, den Exponenten hingegen als eine Nebengröße angenommen, so daß eben deswegen er nur zu der Bildung der Coefficienten mitwürken konnte, welche den Gliedern der Reihe beygegeben werden mußten, durch die sich der Werth des Ausdrucks darstellte. Aber es ist eben so gut gestattet,

die Wurzel der Potenz als Nebengröße, ihren Exponenten hingegen als Hauptgröße anzunehmen. Alsdann aber legt man sich eben dadurch die Verpflichtung auf, den Werth der Potenz, wenn es überall möglich ist, in einer Reihe darzustellen, in welcher der Grundfactor nur zu den Coefficienten beyträgt, während der Exponent die Hauptgröße hergibt, nach deren Potenzen die Reihe selbst fortschreitet. Es ist nicht überflüssig diese verschiedene Ansicht der nemlichen Zahlenform, weil sie auf den Gang ihrer Entwicklung wesentlichen Einfluß hat, durch besondre Kunstwörter festzuhalten. Eine Potenz, bey welcher die Hauptgröße nur in dem Grundfactor liegt, mag ihren bisherigen Namen behalten. Eine Potenz hingegen, bey welcher die Hauptgröße auf irgend eine Weise im Exponenten erscheint, soll die Benennung einer Exponenzialgröße führen.

Die einfachste, einer Entwicklung Anlaß gebende Form der eigentlichen Potenz war $(1+x)^n$; ihr Resultat gibt der binomische Lehrsatz. Wollten wir sie als Exponenzialgröße betrachten, so müßte die Bezeichnung geändert werden, insofern wir die einmal angenommene Gewohnheit beybehalten wollen, Nebengrößen durch die ersten, Hauptgrößen durch die lezten Buchstaben des Alphabets anzudeuten. So würde sie etwa durch $(1+a)^x$ bezeichnet werden müssen. Diese Aenderung der Zeichen hindert nun keinesweges, den binomischen Lehrsatz, welcher für alle Werthe, die der Exponent x bekommen mögte, unbe-

dingte Gültigkeit besitzt, auf sie anzuwenden, und die ihm gemäß geformte Reihe

$$1 + x.a + \frac{x.(x-1)a^2}{1.2} .. + \frac{x.(x-1)..[x-(r-1)]a^r}{1.2.\ r} ..$$

würde als materiel richtig anerkannt werden müssen. Aber der Verstoß gegen die Form spränge auf den ersten Blick in die Augen. Denn es ist eine Nebengröße, nach deren Potenzen die Reihe fortgeht, und ihre Coefficienten enthalten, in Ausdrücken die immer verwickelter werden, diejenige, welche als Hauptgröße den Fortschritt der Reihe regieren sollte.

Wir haben also die Frage aufzuwerfen, ob nicht vielleicht die binomische Reihe selbst so umgewandelt werden kann, daß sie aus ihrer bisherigen Gestalt in die jezt beabsichtigte übergeht. Und davon ist die Möglichkeit im Allgemeinen nicht schwer zu entdecken.

Es sind die Binomialcoefficienten, welche in ihren Zählern unsre gegenwärtige Hauptgröße enthalten, Diese Zähler sind, in Beziehung auf sie, nichts anders als Producte aus mehreren Formen des ersten Grades. Jedes von ihnen läßt sich durch würkliche Multiplication berechnen, und die daraus entspringenden Formen, mit den in den einzelnen Gliedern zu ihnen als Factoren gehörigen Nebengrößen versehn, lassen sich in eine Summe zusammenziehn. So entspringt aus dem ersten Gliede der binomischen Reihe x. a, die Form a.x, aus dem zweyten $\frac{x.(x-1)a^2}{1.2}$ die Form $\frac{a^2x^2}{2} - \frac{a^2x}{2}$, aus dem dritten $\frac{x(x-1)(x-2)a^3}{1.2.3}$

die Form $\frac{a^3}{6} - \frac{a^3 x^2}{2} + \frac{a^3 x}{3}$, und so ließen sich auch die folgenden Glieder von ihr durch gemeine Multiplication in Formen auflösen, welche regelmäßig nach Potenzen von x fortschreiten, und sich also zu einer einzigen ähnlichen zusammziehen lassen würden.

Aber es ist mehr als eine Schwierigkeit bey diesem Geschäfte, welche vorher erwogen zu werden verdient. Zuerst entsteht wohl die Frage: ist überhaupt auf diesem Wege eine, allgemeine Formel möglich? Sobald der Exponent x eine negative oder gebrochene Zahl ist, schließt sich die binomische Reihe nicht, ebensowenig also auch wird sich alsdann die Exponenzialreihe schließen können. Aber wenn der Exponent eine ganze positive Zahl seyn soll, so schließt sich die binomische Reihe allerdings; es scheint also alsdann auch die Exponenzialreihe abbrechen zu müssen, und dies ist unmöglich wenn sie unter einer einzigen Form enthalten seyn soll. Diese Schwierigkeit kann gehoben werden. Es ist erlaubt die Formel des binomischen Lehrsatzes für jeden Fall in unbestimmte Weite hinaus zu gebrauchen, und jeder nach ihr berechneten Potenz so viele Glieder beyzulegen als man will, wenn nur jedes dieser Glieder nach ihrer Vorschrift berechnet wird. So ist ganz richtig von $(1 + a)^2$ das tausendste Glied $\frac{2.(2-1)..(2-999)\,a^{1000}}{1\,.\,.\,.\,.\,1000}$, denn der Coefficient dieses Gliedes, wenn man ihn würklich berechnet, hat 0 zum Factor. Man darf

also, auch für ganze positive Exponenten die Reihe des binomischen Lehrsatzes als eine unbestimmt fortlaufende betrachten.

Eben daraus aber entspringt eine zweyte Schwierigkeit. Jedes Glied der binomischen Reihe, wenn man den Zähler seines Coefficienten durch würklich angestellte Multiplication auflößt, verwandelt sich in eine Form die nach Potenzen von x fortschreitet. Wir werden sogleich sehn, daß jede von diesen Formen mit der ersten Potenz von x anhebt, und regelmäßig durch die nächsthöheren fortgeht. Solcher Formen, die sich zuletzt in eine Summe zusammenziehn sollen, wird es also eine unbestimmt fortlaufende Menge geben. Und eben darum wird auf diesem Wege keiner von den einzelnen Coefficienten, die den Gliedern jener Summe beygelegt werden müssen, als eine genau bestimmte, völlig geschlossene Größe dargestellt werden können; jeder wird als eine Reihe einzelner Theile erscheinen, welche nur willkührlich abgebrochen ist, und bey weiterer Fortsetzung der ganzen Entwicklung auch noch fernere Zusätze bekommen haben würde. Diese Schwierigkeit ist bey dem unmittelbaren Uebergange von der binomischen Reihe zur Exponenzialreihe nicht zu vermeiden; jeder Coefficient der letzteren muß dabey als eine, der vollständigen, geschloßnen Entwicklung nicht fähige Größe, eben so wie die ganze Reihe selbst, angesehn werden, und wir müssen uns für den Anfang begnügen, nur das Gesetz zu ergreifen, wonach sich die Entwicklungen der einzelnen Coefficienten in ihrem

Fortschreiten erhalten. Ob diese Coefficienten würklich bestimmte Zahlen sind, deren Werthe in geschlossenen Ausdrücken angegeben werden können, läßt sich erst später beurtheilen.

Wir wollen den Anfang der vorzunehmenden Umformung damit machen, daß wir das erste Glied der verlangten Exponenzialreihe, deren Anfangsglied 1 seyn wird, dasjenige also, was in x^1 multiplicirt seyn muß, zu bestimmen suchen; ein Geschäft, wobey es bloß darauf ankommt, die einzelnen Theile, woraus sich der Coefficient desselben zusammensetzt, allmälig zusammen zu finden, und die Regel, welche in ihrem Fortschritt herrscht, zu entdecken. Nun gibt jedes Glied der binomischen Reihe, wenn man die Zähler des in ihm enthaltenen Binomialcoefficienten entwickelt, einen Theil, welcher in x^1 multiplicirt ist; es entsteht also, allgemein, der r^{te} Theil des Coefficienten, der zu x^1 gehört, aus dem r^{ten} Gliede der binomischen Reihe. Nun ist bekanntlich von $(1+a)^x$ das r^{te} Glied $= \frac{x.(x-1)..[x-(r-1)]}{1.2.r} a^r$.

Wir brauchen von dem Producte, welches aus der Entwicklung des Zählers in seinem Coefficienten entspringt, nur das niedrigste Glied. Der erste Factor jenes Products ist x selbst, jeder der andern ist eine Form des ersten Grades, und es sind die negativen ganzen Zahlen nach der Reihe, welche die zweyten Theile dieser Factoren bilden. Das niedrigste Glied eines Products erwächst aus denen seiner Factoren; man multiplicire also x mit jenen lezten Theilen der

übrigen Factoren $(-1).(-2)..[-(r-1)]$ und man erhält das Verlangte. Dazu muß der Nenner des Coefficienten, und die Potenz a^r, zu welcher er als Factor gehört, gefügt werden $\frac{(-1).(-2)..[-(r-1)]\,a^r}{1\,.\,2\,..\,r}$.

Dieser Ausdruck ist noch einer Abkürzung fähig. Man sondre von jedem der negativen Factoren im Zähler (-1) ab, und ziehe diese ihre Multiplicatoren in ein Product $(-1)^{r-1}$ zusammen. Alsdann enthält der Nenner alle Factoren des Zählers, und noch einen, um eine Einheit, als der höchste von ihnen, größeren. So wird sich also, durch Aufheben der gemeinschaftlichen, der Ausdruck auf $(-1)^{r-1}.\frac{1}{r}\,a^r$ zusammenziehn. In ihm ist das Gesetz der Reihe vollständig enthalten, wodurch sich, in fortgehender Entwicklung, der Coefficient für x^1 ausdrücken wird. Man setze für r die successiven ganzen Zahlen, so erhält man allmälig jedes Glied von ihr. Es stellt also $a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}\ldots(-1)^{r-1}\frac{a^r}{r}\ldots$ den Inbegriff derjenigen Größen dar, die sich als Entwicklung der Größe ergeben, welche den Coefficienten des ersten Gliedes der Exponenzialreihe für $(1+a)^x$ ausmacht.

Auf ähnliche Weise, wie wir für den ersten Coefficienten der Exponenzialreihe einen Ausdruck gefunden haben, läßt sich ein solcher auch für jeden folgenden erhalten. Nur werden die Beziehungen verwickelter, und bedürften, um auf eine einfache Gestalt zurück

zukommen, fernerer Untersuchungen. Man stelle sich wieder die anfängliche binomische Reihe vor

$1 + {}^{x}\overset{1}{\mathfrak{B}} a^{1} + {}^{x}\overset{2}{\mathfrak{B}} a^{2} .. + {}^{x}\overset{n}{\mathfrak{B}} a^{n} .. + {}^{x}\overset{n+r}{\mathfrak{B}} a^{n+r}$,

und verlange jezt allgemein zu x^n den Coefficienten, welchen die Umformung geben wird. Dem bekannten Gesetze der Binomialcoefficienten gemäß kommt diese Potenz von x zuerst bey der Entwicklung des n^{ten} unter ihnen selbst, nachher aber bey der jedes folgenden gleichfalls in einem Gliede der daraus entspringenden, nach x geordneten, Formen vor. Will man also, allgemein, des Coefficienten, welcher x^n angehören wird, r^{ten} Theil haben, so nehme man das r^{te} unter den Gliedern der binomischen Reihe, in welchen x^n zu finden seyn soll, d. h. das r^{te} nach dem, worin es zuerst anzutreffen war, mithin das $n + r^{te}$ vom Anfang, ${}^{x}\overset{n+r}{\mathfrak{B}} a^{n+r}$. Man behalte bloß den Theil des entwickelten Zählers von seinem Coefficienten, in dem sich x^n befindet, und man hat das Gesuchte.

Nun aber ist der Zähler ein Product aus den zweytheiligen Formen des ersten Grades, $(x-0)(x-1),.. [x-(n+r-1)]$. Es muß aus dem Vorhergehenden bekannt seyn, wie sich jedes Glied eines solchen Productes bildet. Seine Coefficienten sind Combinations-Inbegriffe aus den zweyten Theilen der Factoren, als unwiederholbaren Elementen, zu einer Classe gehörig, deren Rang, mit dem Grade der Potenz, der sie als jedesmaliger Coefficient angehören, die Anzahl der überall vorhandenen Factoren ausmacht.

In Zeichen: bey dem oben angedeuteten Producte hat x^n zum Coefficienten $\overset{r}{C}[0, (-1), (-2) \ldots -(n+r-1)]$. Fügt man diesem, aus dem Zähler hervorgehobenen Theile, den Nenner, und die zugehörige Potenz von a bey, so erhält man allgemein, als das 1te Glied der Reihe, in welche sich der n^{te} Coefficient der Exponenzialreihe entwickelt, $\frac{\overset{r}{C}[-1, -2, \ldots -(n+r-1)]\, a^{n+r}}{1 . 2 \ldots n+r}$

Aber dieser Ausdruck, obschon, vermöge seiner, jeder einzelne Coefficient berechnet werden kann, ist sehr verwickelt. Nun darf man zwar allerdings vermuthen, daß sich, bey würklich angestellter Berechnung, Zusammenziehungen machen lassen werden, wie sie, für $n = 1$, d. h für den ersten Coefficienten der Exponenzialreihe würklich im Vorhergehenden geleistet worden sind. Aber es mögte schwer seyn, durch eine directe Betrachtung dazu den Weg zu finden. Und da ohnehin für die würkliche Berechnung die recurrirende Bestimmung immer bequemer ist, als die independente, so bildet sich die Frage von selbst, ob nicht unter den successiven Coefficienten der Exponenzialreihe durch eine Recursionsformel die gegenseitige Beziehung ausgedrückt werden könnte; wobey der erste von ihnen, welcher natürlich keine Recursion geben kann, als gefunden im Vorhergehenden vorausgesetzt werden darf. Die independente, eben abgeleitete Formel, berechtigt uns, zu setzen, daß, wenn unter $\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \ldots \overset{r}{A}$, Größen verstanden werden, die von der Zahl a abhängen,

und von denen namentlich die erste, $\overset{1}{A} = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} \cdot + (-1)^{r-1} \frac{a^r}{r} + \ldots$ ist, $(1+a)^x = 1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 \cdot + \overset{r}{A}x^r \ldots$ angenommen werden darf.

Wir müssen jetzt, wenn es unsre Absicht ist, die fingirten Coefficienten dieser Reihe durch gegenseitigen Zusammenhang zu bestimmen, den Werth der Reihe in directe Rechnungen verflechten, deren Resultat durch Hülfe der Reihe selbst ursprünglich ausgedrückt werden kann, um zwey Formen, die sich beyde aus ihr gebildet haben, einander gleichsetzen, und ebendadurch zu den gewünschten Gleichungen unter ihren Coefficienten gelangen zu können.

Als ein sehr bequemes Mittel zu dieser Absicht bietet sich folgendes Verfahren dar. Man erhebe die Exponenzialgröße $(1 + a)^x$, mithin auch die ihren Werth ausdrückende Reihe zum Quadrat. Das Resultat ist eine neue Exponenzialgröße, deren Exponent das Doppelte des Vorigen seyn wird $(1 + a)^{2x}$. Ihren Werth kann man aber auch durch die ursprüngliche Exponenzialreihe selbst, wenn man nur in dieser den Exponenten doppelt so groß macht, oder statt x, 2x setzt, erhalten. Beyde Werthe müssen identisch seyn, und so erhält man zwey, aus der Exponenzialreihe gebildete Formen, deren gleichhohe Coefficienten durchaus gleichgesetzt werden dürfen.

Der Anfang dieser Rechnung kann uns belehren, ob sich auf diesem Wege einfache Resultate erhalten lassen.

Das würklich berechnete Quadrat der Reihe

$$1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \overset{3}{A}x^3 + \overset{4}{A}x^4 + \ldots$$

gibt

$$1 + 2\overset{1}{A}x + \left.\begin{array}{l} 2\overset{2}{A} \\ + \overset{1}{A}{}^2 \end{array}\right\} x^2 + \left.\begin{array}{l} 2\overset{3}{A} \\ 2\overset{1}{A}\overset{2}{A} \end{array}\right\} x^3 + \left.\begin{array}{l} 2\overset{4}{A} \\ + \overset{1}{A}\overset{3}{A} \\ + \overset{2}{A}{}^2 \end{array}\right\} x^4 + \ldots$$

Hingegen die Exponenzialreihe selbst, wenn man in ihr, um den Werth von $(1 + a)^{2x}$ zu erhalten, für x substituirt 2x, gibt

$$1 + \overset{1}{A}2x + \overset{2}{A}4x^2 + \overset{3}{A}8x^3 + \overset{4}{A}16x^4 + \ldots$$

Aus der Identificirung der Coefficienten in diesen beyden Formen ergeben sich allmälig folgende Gleichungen und Werthe

1) $2.\overset{1}{A} = \overset{1}{A}\,2.$ Eine Tautologie, die uns zeigt, was sich ohnehin von selbst verstand, daß der erste Coefficient nicht durch Hülfe der Recursion gefunden werden kann.

2) $2.\overset{2}{A} + \overset{1}{A}{}^2 = \overset{2}{A}.4$

$$\frac{\overset{1}{A}{}^2}{2} = \overset{2}{A}$$

3) $2.\overset{3}{A} + 2\overset{1}{A}\overset{2}{A} = \overset{3}{A}.8$

$$\frac{\overset{1}{A}\overset{2}{A}}{3} = \overset{3}{A} = \frac{\overset{1}{A}{}^3}{1.2.3}$$

$$4)\ 2\overset{4}{A} + 2\overset{1}{A}.\overset{3}{A} + \overset{2}{A}{}^2 = \overset{4}{A}.16$$

$$\frac{2\overset{1}{A}.\overset{3}{A} + \overset{2}{A}{}^2}{14} = \overset{4}{A} = \frac{\overset{1}{A}{}^4}{1.2.3.4}$$

Es zeigt sich offenbar in diesen Coefficienten ein sehr einfaches Gesetz. Sie sind die successiven Potenzen des ersten, durch die Permutationszahlen ihrer eignen Grade dividirt, so daß, wenn wir dasselbe unbestimmt für den n^{ten} Coefficienten annehmen wollten, $\overset{n}{A} = \frac{\overset{1}{A}{}^n}{1.2..n}$ seyn würde.

Es braucht jetzt nur gezeigt zu werden, daß dieses Gesetz überhaupt für jeden nachfolgenden Coefficienten gültig seyn muß, vorausgesetzt, daß es für jeden der vorhergehenden als richtig angenommen werden darf, um die Allgemeinheit desselben abgeleitet zu haben. Dies kann aber auf demselben Wege geschehn, welcher für die Bestimmung der ersten Coefficienten gebraucht worden ist.

Wir nehmen also die Exponenzialreihe

$$(1+a)^x = 1 + \overset{1}{A}x + .. \overset{r}{A}x^r .. + \overset{n}{A}x^n + \overset{n+1}{A}x^{n+1} ..$$

um sie zum Quadrat zu erheben, und von der daraus resultirenden Form unbestimmt das $(n+1)^{te}$ Glied herzuheben. Der Coefficient dieses Gliedes ist, nach den bekannten Regeln der gemeinen Multiplication, der Inbegriff aller Producte aus je zwey Coefficienten der Grundreihe, deren Indices zusammen $n+1$ ausmachen; in Zeichen also, eine Reihe von Theilen, die

mit $\overset{n+1}{A}.1$ anhebt; allgemein zum r^{ten} folgenden (unter r jede beliebige ganze Zahl, die nicht größer als n ist, verstanden) $\overset{n+1-r}{A}.\overset{r}{A}$; zum lezten endlich $1.\overset{n+1}{A}$ hat; so daß von $[(1+a)^x]^2$ das $n+1^{te}$ Glied durch $(\overset{n+1}{A}.1 + \overset{n}{A}.\overset{1}{A}.. + \overset{n+1-r}{A}.\overset{r}{A}.. + \overset{1}{A}.\overset{n}{A} + 1.\overset{n+1}{A})x^{n+1}$ ausgedrückt werden kann.

Drückt man aber das gefoderte Quadrat der Exponenzialgröße durch eine andre mit verdoppeltem Exponenten $(1+a)^{2x}$ aus, und wendet man die angenommene Exponenzialreihe unmittelbar auf diese an, so bekommt man das $(n+1)^{te}$ Glied seines entwickelten Werths $\overset{n+1}{A}.2^{n+1}.x^{n+1}$. Beyde Ausdrücke müssen identisch seyn. Man erhält also, die Coefficienten gleichsetzend, $\overset{n+1}{A}.2^{n+1} = \overset{n+1}{A} + \overset{n}{A}.\overset{1}{A}..\overset{n+1-r}{A}.\overset{r}{A}..\overset{1}{A}.\overset{n}{A} + \overset{n+1}{A}$. Da wir die Absicht haben, durch Hülfe dieser Gleichung, den höchsten Coefficienten aus den vorhergehenden zu berechnen, so muß das erste und letzte Glied der Reihe, welche auf der zweyten Seite des Gleichheitszeichens steht, transponirt werden, und wir erhalten alsdann

$$\overset{n+1}{A}.2^{n+1} - 2\overset{n+1}{A} = \overset{n+1}{A}.(2^{n+1}-2) = \overset{n}{A}.\overset{1}{A}.. + \overset{n+1-r}{A}.\overset{r}{A}.. + \overset{1}{A}.\overset{n}{A}$$

Und so ist eine Formel gefunden, die es möglich macht, jeden folgenden Coefficienten aus den bekannten Werthen der vor ihm vorhergehenden zu bestimmen.

Nehmen wir also jetzt an, daß alle diese vorhergehenden dem obigen Gesetze unterworfen sind,

$\overset{n}{A} = \frac{\overset{1}{A}{}^{n}}{1.2..n}$, $\overset{n+1-r}{A} = \frac{\overset{1}{A}{}^{n+1-r}}{1.2.(n+1-r)}$, $\overset{r}{A} = \frac{\overset{1}{A}{}^{r}}{1.2..r}$, so können wir jene Formel noch mehr zusammenziehn.

Der Werth von $\overset{n+1}{A}(2^{n+1}-2)$ wurde durch eine Reihe gegeben, deren 1tes Glied $\overset{n}{A}.\overset{1}{A}$, deren rtes Glied $\overset{n+1-r}{A}.\overset{r}{A}$, deren letztes Glied $\overset{1}{A}.\overset{n}{A}$ war. Nun ist, der Annahme gemäß, $\overset{n}{A} = \frac{\overset{1}{A}{}^{n}}{1..n}$, es wird also $\overset{n}{A}.\overset{1}{A} = \frac{\overset{1}{A}{}^{n+1}}{1.2..n}$; eben so, weil $\overset{n+1-r}{A} = \frac{\overset{1}{A}{}^{n+1-r}}{1.2..(n+1-r)}$, und $\overset{r}{A} = \frac{\overset{1}{A}{}^{r}}{1.2.r}$, wird $\overset{n+1-r}{A}.\overset{r}{A} = \frac{\overset{1}{A}{}^{n+1}}{1.2..(n+1-r).1.2..r}$; man bekommt also, diese Werthe substituirend,

$$\overset{n+1}{A}(2^{2n+1}-2) = \frac{\overset{1}{A}{}^{n+1}}{1.2..n}\ldots + \frac{\overset{1}{A}{}^{n+1}}{1.2..(n+1-r).1.2..r}\ldots + \frac{\overset{1}{A}{}^{n+1}}{1.2..n}$$

Sondern wir zuerst in allen Gliedern dieser Reihe den gemeinschaftlichen Factor $\overset{1}{A}{}^{n+1}$ ab; multipliciren wir alsdann jedes mit 1.2..(n+1), um hernach der ganzen Summe eben dieses Product als Divisor wieder beyzufügen, so erhalten wir $\overset{n+1}{A}(2^{n+1}-2) = \frac{\overset{1}{A}{}^{n+1}}{1.2..(n+1)}$.

$$\left(\frac{[n+1]..2.1}{1.2..n}..+\frac{[n+1]..2.1}{1.2..(n+1-r).1.2..r}..+\frac{[n+1]..2.1}{1.2..n}\right)$$

Jetzt aber wird für die Glieder unsrer Reihe eine neue, bedeutende Abkürzung möglich.

Das erste, und also auch das lezte mit ihm identische, hat im Nenner das Product $1.2..n$, im Zähler das noch einen Factor weiter hinaufgehende $(n+1)..2.1$. Es wird also, gemeinschaftliche Factoren gehoben, $= n+1$. Allgemein das r^{te} hat im Nenner zwey Producte aus Factoren-Reihen, die mit 1 anfangen. Das erste unter diesen, $1.2..(n+1-r)$ kann ganz gegen eben so viele Factoren des Zählers, welcher von 1 bis $(n+1)$ hinaufgeht, gehoben werden. Es bleiben alsdann im Zähler noch alle Factoren, die über $n+1-r$ hinausgehn; d. h. diejenigen von denen $(n+1-r+1)$ der niedrigste, $n+1$ der höchste ist, und ihnen gehört als Nenner das zweyte Product, welches im anfänglichen Nenner vorkam. So wird jenes r^{te} Glied $\frac{(n+1)..(n+1-r+1)}{1.2..r}$ Dieser Ausdruck ist aber gerade der Werth eines Binomialcoefficienten, von der Zahl r, zu einer Potenz vom Grade $n+1$ gehörig, ${}^{n+1}\overset{r}{B}$, und es stimmt damit auch der Werth des 1ten Gliedes, wo $r=1$ ist, weil ${}^{n+1}\overset{1}{B}=n+1$; so wie des lezten, wo $r=n$, weil ${}^{n+1}\overset{n}{B}$ wieder $=n+1$, völlig überein. Wir bekommen also jezt

$$\overset{n+1}{A}(2^{n+1}-2)=\frac{\overset{1}{A}{}^{n+1}}{1.2..(n+1)}\left({}^{n+1}\overset{1}{B}..+{}^{n+1}\overset{r}{B}..+{}^{n+1}\overset{n}{B}\right)$$

Nun aber ist es aus der Formel des binomischen Lehrsatzes für ganze positive Exponenten bekannt, daß die Summe aller Binomialcoefficienten, die einer gewissen

Potenz angehören, einer Potenz der Zahl 2 von eben dem Grade gleich kommt, also hier

$$1 + {}^{n+1}\overset{1}{\mathfrak{B}} + \dots {}^{n+1}\overset{r}{\mathfrak{B}} + \dots {}^{n+1}\overset{n}{\mathfrak{B}} + 1 = 2^{n+1}$$

Unsre Reihe aber fodert die Summe aller dieser Binomialcoefficienten, mit der Modification, daß in ihr der anfängliche 1, und der lezte, gleichfalls 1, nicht vorkommt. Rechnen wir also auf beyden Seiten 2 ab, so bekommen wir

$${}^{n+1}\overset{1}{\mathfrak{B}} + \dots {}^{n+1}\overset{r}{\mathfrak{B}} + \dots {}^{n+1}\overset{n}{\mathfrak{B}} = 2^{n+1} - 2.$$

Wird dieser Ausdruck in der vorigen Gleichung substituirt, so gibt sie $\overset{n+1}{A}(2^{n+1}-2) = \frac{\overset{1}{A}{}^{n+1}.(2^{n+1}-2)}{1.2..(n+1)}$

Mithin, nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors $(2^{n+1}-2)$ auf beyden Seiten, $\overset{n+1}{A} = \frac{\overset{1}{A}{}^{n+1}}{1.2..n+1}$.

Und auf diese Weise ist die unbedingte Gültigkeit der Behauptung dargethan, daß jeder folgende Coefficient der Exponenzialreihe eine Potenz des ersten, deren Grad sein eigner Index anzeigt, durch die Versetzungszahl dieses Grades dividirt, seyn muß. Es ist folglich

$$(1+a)^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \dots \frac{A^n x^n}{1.2..n} + \dots$$

wobey $A = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \dots \frac{(-1)^{n-1}.a^n}{n} + \dots$

Dieser erste Coefficient der Exponenzialreihe, von welchem alle folgenden abhängen, ist als eine besonders wichtige Zahl bey dem Gebrauche der Reihe anzusehn. Er hängt lediglich von dem Grundfactor, Basis, $1+a$,

ab, welchen man für die zu berechnende Potenz angenommen hat, und ändert sich nicht, so lange diese Basis beybehalten wird, welches auch der Exponent der Potenz seyn möge. Nun pflegt man alle Potenzen, die aus demselben Grundfactor entstehn, als zu einem Potenzensystem gehörig zu betrachten. Und in sofern darf man sagen: für jedes besondre Potenzensystem hat der erste Coefficient der Exponenzialreihe, und mit ihm jeder folgende, einen unabänderlichen Werth. Zur Abkürzung hat man ihn den **Modulus** des Potenzensystems genannt. Es ist also der Modulus eines Potenzensystems eine bestimmte, von der Basis desselben abhängige Zahl; wird die Basis durch $1 + a$ ausgedrückt, so entwickelt sich der Modulus durch die Reihe $a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \ldots$

Diese Reihe kann freylich, um den eigentlichen Werth des Modulus anzugeben, nur alsdann dienen, wenn a ein echter Bruch oder 1 ist, und man also bey der Berechnung Glieder, die über eine gewisse Potenz von a hinausgehn, sich mit einer bestimmten Näherung begnügend, wegzulassen berechtigt ist. Und so könnte die Exponenzialreihe zur Anwendung auf einzelne bestimmte Zahlen fast unbrauchbar erscheinen, denn, wenn a ein echter Bruch seyn muß, oder doch nicht kleiner als 1, übrigens aber positiv oder negativ, so wird $1 + a$ auf jeden Fall zwischen 0 und 2 enthalten bleiben. Es dürfte also die Exponenzialreihe nur zur Berechnung solcher Potenzensysteme ange-

wendet werden, deren Grundzahl zwischen 0 und 2 liegt. Der binomische Lehrsatz, auf $(1+a)^x$ angewendet, ist freylich eben der Einschränkung unterworfen. Aber bey der Exponenzialreihe vermindert dieser Umstand ihre Brauchbarkeit nur wenig. Wenn sich durch ihren Gebrauch auch nur ein einziges Potenzensystem berechnen ließe, so erfüllte sie unsre Absicht. Denn es zeigt sich ja schon in der Elementar-Arithmetik, daß durch Hülfe eines einzigen Potenzensystems, und aus ihm, alle übrigen mit leichter Mühe abgeleitet werden können.

Denken wir uns aber einen bestimmten Werth von $1+a$, für welchen der Modulus des Potenzensystems A, würklich berechnet ist, so gewährt in der That der Gebrauch der Exponenzialreihe für die Bestimmung aller Potenzen, die diesem System angehören werden, die größte Bequemlichkeit. Eine andre Potenz berechnen, wird heißen, in der Exponenzialreihe, ohne Aenderung ihrer Coefficienten, einen andren Werth für x an die Stelle setzen. Wollte man sich des binomischen Lehrsatzes dabey bedienen, so würden für jeden neuen Werth des x neue Binomialcoefficienten berechnet werden müssen, und also das Verfahren ohne Vergleich verwickelter ausfallen.

Wenn wir nun unter allen Potenzensystemen, für welche der Modulus sich durch unsre Formel berechnen läßt, eins würklich hervorheben sollen, um seine Entwicklung durch Hülfe der Exponenzialreihe auszuführen

welches unter ihnen wird den Vorzug erhalten? Unstreitig dasjenige, für welches die Exponenzialreihe die einfachste Gestalt annimt, daß heißt, Coefficienten erhält, deren Berechnung mit der geringsten Mühe verbunden ist. Hätte man die Wahl, diese Coefficienten, ohne Schaden ihrer gegenseitigen Abhängigkeit, einzurichten, so wäre es ohne Zweifel am einfachsten, wenn man den ersten von ihnen, also den Modulus A, = 1 seyn ließe, weil alsdann alle Potenzen desselben, die in den folgenden Gliedern der Exponenzialreihe vorkommen, gleichfalls 1 werden müßten. Es entsteht also die Frage, ob es nicht möglich ist, einem Potenzensystem eine solche Basis zu geben, daß der aus ihr berechnete Modulus desselben = 1 werden müßte. Vermöge der Reihe, welche uns lehrt, aus der Basis $1 + a$, den Modulus zu berechnen, $A = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + ..$ sind wir nicht im Stande, diese Frage geradezu zu beantworten. Aber die Exponenzialreihe selbst macht es uns möglich, umgekehrt, für jeden beliebigen Werth, welchen der Modulus haben soll, und aus ihm, zu finden, welcher zugehörige Werth der Basis gegeben werden muß. Denn man setze in dieser Reihe

$$(1 + a)^x = 1 + Ax + \frac{A^2 x^2}{1.2} + .. \frac{\overset{n}{A} x^n}{1.2..n} + ..$$

für x den Werth 1 an die Stelle, so wird sie

$$1 + a = 1 + A + \frac{A^2}{1.2} + .. \frac{A^n}{1.2..n} + ..$$

gestattet es also, den Modulus A anzunehmen, und aus ihm die Basis $1+a$, für welche er gehört, aus ihm zu berechnen. Unsre Kentniß der Beziehungen zwischen Basis und Modulus, sofern sie ohne geschlossene arithmetische Ausdrücke, durch Entwicklung in Reihen, gegeben werden kann ist vollständig, und beruht in den beyden vorhin entwickelten Hauptformeln

$$\text{Modul. bas.}(1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \ldots \frac{(-1)^{n-1}a^n}{n} + .$$

$$\text{Basis Modul. } A = 1 + A + \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3}{1.2.3} + \ldots \frac{A^n}{1.2..n} + \ldots$$

Die lezte unter diesen beyden Reihen reicht zur nähernden Berechnung viel weiter als die erste; sie macht es in jedem Fall leichter aus dem Modulus die Basis zu finden, als es die umgekehrte Aufgabe ist.

Und nun wird es keine Schwierigkeit haben, die Basis des einfachsten Potenzensystems zu finden, wenn unter einem solchen dasjenige verstanden werden soll, dessen Modulus 1 ist. Man setze in der Reihe, wodurch sich die Basis aus dem Modulus entwickelt, für A der Werth 1, und berechne soviele von ihren Gliedern, als derjenige Grad der Näherung, welchen man sich zu erreichen vorgesezt hat, nothwendig macht, so findet sich die Basis dieses Systems

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} \ldots + \frac{1}{1.2..n} + \ldots$$

das Resultat dieser Rechnung, bis auf 12 Decimalstellen entwickelt, gibt die Zahl 2,718281828459

Man pflegt sie durchgängig vermittelst eines eigenen Zeichens, des Buchstaben e, anzudeuten, so

daß der Ausdruck e^x immer bedeutet, daß eine Potenz von beliebigem Exponenten, deren Basis aber jene bestimmte Zahl e seyn soll, zu berechnen ist. Das Potenzensystem selbst, dem jene Zahl e zur Basis dient, wird das natürliche, oder das hyperbolische genannt.

Man hat also, um in diesem natürlichen Systeme den berechneten Werth einer beliebigen Potenz zu erhalten, die Exponenzialreihe in ihrer einfachsten Gestalt:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} \ldots + \frac{x^n}{1.2..n} + \ldots$$

Diese Reihe besitzt den besondern Vorzug, daß sie für jeden Werth von x convergent ist, das heißt, spätere Glieder von ihr immer kleinere echte Brüche werden, die jede Grenze der Kleinheit überschreiten können, daß sie mithin zur nähernden Berechnung für alle Fälle gebraucht werden darf. Wenn x selbst ein echter Bruch ist, so ergibt sich die Richtigkeit dieser Behauptung von selbst. Wenn es hingegen eine ganze Zahl von beliebiger Größe seyn sollte, so scheinen in der That die folgenden Glieder der Reihe immer größer zu werden, die Reihe also divergent zu seyn, und keine nähernde Berechnung zu erlauben. In der That ist sie es auch, so lange man noch bey Gliedern von ihr steht, für welche die Zahl, n, kleiner ist als x. Sobald aber diese Grenze erreicht worden, müssen die successiven Glieder allmälig immer kleiner werden. Der Ausdruck des n^{ten}, oder, welches einerley

ist, wenn $n = x$ geworden seyn soll, des x^{ten} Gliedes, ist $\frac{x^n}{1.2..x}$. Das nächsthöhere Glied hat im Zähler einen Factor x, im Nenner den Factor $x + 1$, hinzugefügt erhalten, da es, dem Gesetze der Reihe gemäß, $\frac{x^{n+1}}{1.2..x.(x+1)}$ ist. Es entsteht also aus dem Vorhergehenden, indem man dasselbe mit dem echten Bruche $\frac{x}{x+1}$ multiplicirt. Und von nun an sind es immerfort echte Brüche, womit man die successiven Glieder zu multipliciren hat, um die ihnen nächstfolgenden zu erhalten, und zwar echte Brüche, die fortlaufend immer kleiner werden. Denn der Zähler von jedem bleibt immer x, aber der Nenner wächst fortlaufend um eine Einheit. So ist, wenn aufs Neue x Schritte geschehn sind, der Factor, welcher vom $2x-1^{ten}$ Gliede zum $2x^{ten}$ $\frac{x}{x+x} = \frac{1}{2}$; wenn wieder x Schritte gethan sind, wird er $\frac{x}{x+2x} = \frac{1}{3}$ werden, und so fort. Daß aber eine Größe, die fortwährend mit echten, immer kleiner werdenden Brüchen multiplicirt wird, sie sey Anfangs so groß gewesen als sie wolle, zulezt zu jedem beliebigen Grade von Kleinheit gebracht werden kann, bedarf keines weitern Beweises.

Freylich würde der Gebrauch der Exponenzialreihe in solchen Fällen zu sehr weitläuftigen Rechnungen nöthigen, indem man eine sehr große Anzahl von ihren

Gliedern zu berechnen haben würde, ehe man die folgenden, als einen bestimmten Grad der Näherung den man sich vorgesetzt haben mögte, nicht mehr afficirend, außer Acht zu lassen berechtigt wäre. Aber es verdient doch als ein besonders merkwürdiger Umstand angeführt zu werden, daß eine Reihe immer convergent seyn kann, was auch für die Hauptgröße, wonach sie fortschreitet, gesetzt werden möge, und davon stellt die Exponenzialreihe das erste Beyspiel dar. Hätte sie die Permutationszahlen nicht als Divisoren, sondern als Factoren in ihren einzelnen Gliedern, so könnte sie gar nicht zur nähernden Berechnung gebraucht werden, welchen Werth man auch für x in ihr annehmen mögte.

Denkt man sich ein System von Potenzen in diesem natürlichen Systeme als berechnet, so wird es leicht seyn, auch für jede andre Exponenzialgröße, deren Basis willkührlich angenommen seyn mag, b^x, den Werth zu entwickeln. Man nehme die Basis dieses Systems, b, und suche die Potenz des natürlichen Systems auf, deren berechneter Werth ihr gleich kommt. Sie sey $e^B = b$. Als dann ist $b^x = (e^B)^x = e^{Bx}$, und man hat also

$$b^x = e^{Bx} = 1 + Bx + \frac{B^2x^2}{1.2} \ldots + \frac{B^nx^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

Es kommt in der theoretischen Analysis selten vor, daß ein andres Potenzensystem als das natürliche im Ganzen oder im Einzelnen berechnet werden soll. Einige nähere Modificationen der zu dieser Absicht

eben gegebenen Formel wird das nächste Capitel enthalten.

Die allgemeine Aufgabe, eine Potenz zu entwickeln, deren Exponent eine nach Potenzen einer gewissen Hauptgröße fortschreitende Form seyn soll, kann nun ohne Schwierigkeit gelöst werden. Es sey das zu Entwickelnde $e^{\overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots}$

Man sehe für den Augenblick den Exponenten als eine einfache Hauptgröße an, $\overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots = z$ setzend, so hat man e^z, welches nach unsrer Fundamentalreihe durch $1 + z + \frac{z^2}{1.2} \ldots + \frac{z^n}{1 \ldots n} + \ldots$ dargestellt werden kann. Man setze in dieser Form für z seinen Werth wieder an die Stelle

$$1 = 1$$

$$z = (\overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots)^1$$

$$\frac{z^2}{1.2} = \frac{1}{1.2}(\overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots)^2$$

$$\vdots$$

$$\frac{z^n}{1.2.n} = \frac{1}{1.2.n}(\overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots)^n$$

und entwickle alle einzelnen Glieder, um ihre Summe in eine einzige, nach Potenzen von x fortschreitende Form zusammenzuziehn. Es kommt dabey nur darauf an, Potenzen von ganzen und positiven Exponenten zu berechnen. Allgemein werde von der resultirenden Form das Glied verlangt, welches x^n enthalten soll. Jedes Glied der einfachen Exponenzialreihe, vom

ersten, worin z^1 vorkommt, bis zum n^{ten}, welches z^n in sich schließt, gibt, bey der Substitution des angenommenen Werthes für $z = a^1 x + a^2 x^2 .. + a^r x^r ..$, einen Theil her, welcher in x^n multiplicirt seyn wird. So sezt sich also der gefoderte Coefficient aus eben so vielen Theilen zusammen, und wir werden allgemein sagen dürfen, daß aus dem h^{ten} Gliede der Exponenzialreihe, $\frac{z^h}{1.2..h}$, wenn wir es entwickeln, der h^{te} Theil desselben seinen Ursprung nehme, vorausgesezt, daß h eine Zahl, die zwischen 1 und n liegt, bedeuten soll. Die Frage aber, wie das Glied aus $z^h = (\overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 .. + \overset{r}{a}x^r ..)^h$, in welchem x^n vorkommt, beschaffen sey, beantwortet sich leicht aus der einfachsten Regel des polynomischen Lehrsatzes. Die Coefficienten von z^h sind Combinationen der h^{ten} Classe aus den Coefficienten der Grundform als Elementen; die Summe, wozu sie gehören sollen, zeigt die Potenz von x an, deren Coefficienten man fodert. In Zeichen: der Coefficient zu x^n aus $\frac{z^h}{1..h}$ wird seyn $\frac{{}^n\overset{h}{C}}{1.2..h}$. In diesem Ausdrucke also hat man den h^{ten} Theil der Größe gefunden, welche bey vollständiger Entwicklung unsrer Potenz zu x^n als Coefficient gehören wird, so daß also dieser ganze Coefficient durch das Zeichen $\overset{h}{1..n}\Sigma \left(\frac{{}^n\overset{h}{C}}{1.2.h} \right)$ angedeutet werden kann. Es ist also die ganze Regel der Berechnung in folgender Formel enthalten.

Um $e^{\overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 + \overset{3}{a}x^3 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots}$ in eine nach Potenzen von x fortschreitende Form aufzulösen, nehme man die Coefficienten der Grundform $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots \overset{r}{a}, \ldots$ als wiederholbare Elemente aus denen Combinationsformen gebildet werden sollen, und die Reihe

$$1 + {}^1\overset{1}{C}x + \left(\frac{{}^2\overset{2}{C}}{1.2} + {}^2\overset{1}{C}\right)x^2 + \left(\frac{{}^3\overset{3}{C}}{1.2.3} + \frac{{}^3\overset{2}{C}}{1.2} + {}^3\overset{1}{C}\right)x^3 \ldots$$

$$+ \left(\overset{h}{1} \ldots r\Sigma \frac{1 \,.\, {}^r\overset{h}{C}}{1.2\ldots h}\right)x^r + \ldots$$

gibt die gefoderte Entwicklung.

Hätte die Form des angenommenen Exponenten ein Glied enthalten, worin gar keine Potenz der Hauptgröße vorgekommen wäre, so würde es am einfachsten gewesen seyn, die Potenz als das Product zweyer andern zu betrachten, so daß jenes Anfangsglied des Exponenten dem ersten Factor, der ganze übrige Theil aber dem zweyten, als Exponent beygegeben wäre. In Zeichen $e^{a + \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots} = e^a . e^{\overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots}$. Der erste Factor ließe sich alsdann, weil er bloß Nebengrößen enthält, ohne weitere Entwicklung beybehalten, der zweyte aber fiele genau unter das eben betrachtete Schema zurück.

Die allgemeinste Form einer Exponenzialgröße, deren Basis als Nebengröße gedacht werden soll, würde die folgende seyn $b^{ax^{\alpha} + ax^{\alpha+\delta} + ax^{\alpha+2\delta} \ldots}$

Ihre Entwicklung aber könnte leicht auf das Vorher-

gehende zurückgeführt werden. Man müßte nur zuerst ihre Basis als Potenz des natürlichen Systems darzustellen wissen $b = e^{B}$. Alsdann würde sie $e^{B(ax^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} + \overset{2}{a}x^{\alpha+2\delta})}$, und man würde, um sie ferner zu entwickeln, wieder für den Augenblick ihren Exponenten $B(ax^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} ..) = z$ setzen, mithin sie auf die einfache Gestalt e^{z} zurückbringen. Die einzelnen Glieder der daraus entstehenden Reihe ließen sich auch, weil jedes von ihnen eine ganze positive Potenz von z enthält, sehr leicht in Reihen auflösen, die nach Potenzen der eigentlichen Hauptgröße, x, fortgehn würden. Aber diese Formen würklich zu einer einzigen durch Addition zusammenzuziehn, vermögte man im Allgemeinen nicht weiter. Denn die erste Reihe, aus z^{1} entsprungen, finge mit x^{α} an, durch $x^{\alpha+\delta}$, $x^{\alpha+2\delta}$, u. s. w. fortlaufend; die zweyte, welche aus z^{2} ihren Ursprung nimt, würde mit $x^{2\alpha}$ beginnen, und durch $x^{2\alpha+\delta}$, $x^{2\alpha+2\delta}$ u. s. w. fortgehn; und so würde überhaupt jede folgende mit einem nächsthöheren Vielfachen von α anheben, und dasselbe in ihren folgenden Gliedern, mit den successiven Vielfachen von δ vermehrt bewahren. Also nur bey gewissen bestimmten Verhältnissen zwischen α und δ, oder genauer nur dann, wenn α ein Vielfaches von δ wäre, würde eine Vereinigung dieser Reihen zu einer einzigen von ähnlicher Gestalt, wie die Grundform des angenommenen Exponenten, möglich seyn. Es entzieht sich also eigentlich eine solche, allgemeiner ausgedrückte Expo-

nenzialgröße, den bisher gültigen Gesetzen analytischer Entwicklung.

Die allgemeine Aufgabe, eine Exponenzialgröße der Form $e^{\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2+\cdots}$ zu entwickeln, hat im Vorhergehenden ihre independente Auflösung vollständig erhalten. Aber die Analysis fodert mit Recht eine recurrirende als die zweyte Hauptform jeder Entwicklung. Und wir haben nachzusuchen, ob sich nicht zwischen den Coefficienten der Reihe für $e^{\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2+\cdots}$ $= A + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 ..$ ein Gesetz des gegenseitigen Zusammenhangs entdecken läßt, durch dessen Hülfe jeder folgende von ihnen aus dem vorhergehenden berechnet werden kann.

Hier kehrt die ganze Untersuchung fast ungeändert wieder, welche bey der Ableitung einer Recursionsformel für die Coefficienten der Potenz eines Polynomiums (pag. 205 – 211) angestellt worden ist. Das independente Gesetz unsrer Coefficienten gibt $\overset{r}{A} = {}^{1..r}\overset{h}{\Sigma}\left(\frac{{}^{r}\overset{h}{C}_{p}}{1.2..h}\right)$. Wäre in diesem Ausdruck nicht der Divisor 1..h, so fiele er völlig mit dem für die Coefficienten eines Quotienten zusammen, welcher sich aus $\frac{1}{1-\overset{1}{a}x-\overset{2}{a}x^2..}$ entwickelt, so würde also, wie für diesen, die recurrirende Formel seyn $\overset{r}{A} = \overset{1}{a}\overset{r-1}{A} .. + \overset{k}{a}\overset{r-k}{A} .. + \overset{r}{a}A$. Jetzt aber erlaubt

zwar die Anwesenheit jenes Factors in dem independenten Ausdrucke nicht, diese Formel zu setzen, bringt aber auf die Vermuthung, daß das Hinzufügen eines eignen Factors in jedem Gliede auch diesen Umstand werde beseitigen können, daß also die gesuchte Beziehung durch die Formel $\overset{r}{A} = \overset{1}{f}\overset{1}{a}\overset{r-1}{A} .. + \overset{k}{f}\overset{k}{a},\overset{r-k}{A} .. + \overset{r}{f}\overset{r}{a}A$, werde darstellbar seyn.

Die Prüfung dieser Annahme geschieht hier genau, wie im obigen Falle. Man nehme aus $\overset{r}{A}$ irgend eine Combinationsform, der unbestimmten Classe m gehörig, heraus. Sie wird ihre Permutationszahl N, und dem independenten Gesetze gemäß den Divisor 1.2..m, bey sich führen. Eigentlich sind in ihr alle Variationsformen, aus den Elementen, welche sie in sich enthält, zusammengefaßt. Heben wir alle diejenigen Variationsformen aus diesem Inbegriff wieder hervor, welche unbestimmt das Element $\overset{k}{a}$ an der Spitze führen, von welchem wir annehmen wollen, daß es π mal in der Form vorkommen mag (so daß also $\Sigma\pi = m$, und $\Sigma k\pi = r$ seyn wird), so ist die Anzahl aller dieser Variationsformen $\frac{\pi N}{m}$. Frägt man, wie sie bey der recurrirenden Bildung von $\overset{r}{A}$ in diesen Inbegriff gekommen sind, so ist offenbar, daß sie nur aus $\overset{r-k}{A}$ herrühren können, weil nur dieser Größe beym Recurriren $\overset{k}{a}$ an die Spitze gestellt wird. Sie

sind aber, abgesehn von ihrem Anfangselement $\overset{k}{a}$, sämtlich der Classe $m-1$ angehörig, haben also, dem independenten Gesetze zufolge, insofern sämtlich schon in $\overset{1-k}{A}$ den Divisor $1.2..(m-1)$ geführt, so wie sie bey der Recursion den Factor $\overset{k}{f}$ bekommen haben sollen. Es kommt also jezt nur darauf an, ob der Ausdruck $\frac{\overset{k}{f}}{1.2..(m-1)} \cdot \frac{\pi N}{m}$, wenn man in ihm statt π und k alle möglichen zusammengehörigen Werthe sezt, und die daraus entstehenden Zahlen zusammen rechnet, würklich den Factor $\frac{N}{1.2..m}$ hervorbringt, welchen die angenommene Combinationsform, dem bewiesenen independenten Gesetze gemäß, in $\overset{1}{A}$ bey sich führt, oder in Zeichen, ob ein Werth für $\overset{k}{f}$ gefunden werden kann, unabhängig von m, und also für alle Combinationsformen aus $\overset{1}{A}$, sie mögen gehören, zu welcher Classe sie wollen, sich gleich, der in der That $\Sigma \frac{\overset{k}{f}}{1.2..(m-1)} \cdot \frac{\pi N}{m} = \frac{N}{1..m}$ zu geben vermag.

Sondern wir auf beyden Seiten Factoren, die weder k noch π enthalten, und also als unabänderliche gemeinschaftliche angesehn werden können, ab, d.h. lassen wir $\frac{N}{1.2..m}$ auf beyden Seiten weg, so reduzirt sich unsre Formel auf $\Sigma \overset{k}{f} \cdot \pi = 1$.

Und so wird es hier sehr leicht, zu finden, wie $\overset{k}{f}$ genommen werden muß. Es sollte, der Annahme gemäß $\sum \pi k = r$ seyn. Man braucht also offenbar nur für $\overset{k}{f}$ den Werth $\frac{k}{r}$ zu setzen, um $\sum \overset{k}{f} . \pi = \sum \frac{k\pi}{r}$ in $\frac{r}{r} = 1$ zu verwandeln. Dieser Werth aber $\overset{k}{f} = \frac{k}{r}$, ist so einfach, als man nur wünschen mag, und erscheint offenbar von m völlig unabhängig. Freylich ist er es nicht von r, so daß also die Factoren, welche man im recurrirenden Aufsteigen von vorhergehenden Coefficienten zu folgenden den einzelnen Elementen beyzufügen hat, allerdings bey jeder neuen Recursion geändert werden müssen. Indessen bleibt doch die ganze Formel leicht übersehbar. Man multiplicirt jeden der vorhergehenden Coefficienten mit dem Elemente, welches seinen Index zu der Zahl des verlangten ergänzt, nachdem dies Element selbst mit seinem eignen Index multiplicirt, und durch den des gefoderten Coefficienten dividirt worden ist. In Zeichen: es ist

$$\overset{r}{A} = \frac{1}{r}\overset{1}{a}\overset{r-1}{A} + \frac{2}{r}\overset{2}{a}\overset{r-2}{A} \ldots + \frac{k}{r}\overset{k}{a}\overset{r-k}{A} \ldots + \frac{r}{r}\overset{r}{a}A.$$

Bequemer für die Berechnung wird die Formel, wenn man alle Glieder unter einen, ohnehin schon gemeinschaftlichen Divisor stellt, und so mag denn auch das lezte Resultat ausgesprochen werden: wenn

$$e^{\overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 + \ldots} = A + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 \ldots + \overset{r}{A}x^r \ldots \text{ so ist}$$

$$\overset{r}{A} = \frac{\overset{1}{a}\overset{r-1}{A} + 2\overset{2}{a}\overset{r-2}{A} \ldots + k\overset{k}{a}.\overset{r-k}{A} \ldots + r\overset{r}{a}A}{r}$$

Es verlohnt sich der Mühe nicht, die kleinen Modificationen, welche diese Regel für die etwas erweiterte Form $b^{a+\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^{2}+}$.. erhalten müßte, hier aufs Neue anzuführen.

Es gibt noch höhere Exponenzialgrößen als die bisher betrachteten, und zwar von mancherley Arten. Bleibt die Basis eine Nebengröße, so daß nur der Exponent selbst wieder als eine Exponenzialgröße angenommen wird, so fallen sie unter die Regeln der vorigen Entwicklung zurück. Soll aber die Basis selbst eine nach Potenzen der nemlichen Hauptgröße fortschreitende Form wie der Exponent seyn, so muß man erst Kenntnisse von der Entwicklung logarithmischer Ausdrücke haben, ehe man die ihrige zu unternehmen vermag. Dazu führen die nächstfolgenden Betrachtungen.

Eilftes Kapitel.

Entwicklung der Logarithmen oder Exponenziirung. Logarithmotechnie.

So wie die directe Aufgabe der Potenziirung in zwey verschiedenen Gestalten aufgestellt werden kann, jenachdem man die Hauptgröße in den Grundfactor, oder in den Exponenten der Potenz übertragen hat, so kann auch die umgekehrte Aufgabe, welche durch sie von selbst herbeygeführt wird; in zwey verschiedenen Formen erscheinen. Die eine von diesen ist die Wurzel-

ausziehung; von ihr gibt der binomische Lehrsatz die Auflösung. Die andre hingegen, die Exponenziirung, wobey der berechnete Werth einer Potenz, und der Basis woraus sie sich gebildet haben mag, als bekannt angenommen werden, der Exponent aber, welcher dieser Basis als solcher beygelegt werden muß, damit die Potenz, den vorgeschriebenen Werth erhalte, gefunden werden soll, muß einer genaueren Betrachtung erst unterworfen werden. Es wäre der Natur der Sache angemessen, für diese Operation ein eignes Zeichen einzuführen, wie man auch würklich z. B. das Zeichen $\frac{b}{a}$ vorgeschlagen hat, welches andeuten soll, daß die Zahl b als Potenz der Basis a betrachtet, und der ihr zugehörige Exponent gefunden werden muß, so daß also, wenn $\frac{b}{a} = c$ gesetzt würde, diese Gleichung als Umkehrung von $a^c = b$ anzusehen wäre. Indessen hat man einmal eine an sich überflüssige und unbequeme Terminologie und Bezeichnung von ganz andrer Art eingeführt. Die Benennung Exponent und Logarithme sind gleichbedeutend; statt Werth der Potenz, welcher ein gewisser Exponent angehört, pflegt man Zahl die einem gewissen Logarithmen angehört zu sagen, und so versteht man die Aufgabe der Exponenziirung unter dem Ausdrucke: für eine gegebene Basis, zu einer gewissen Zahl den zugehörigen Logarithmen finden. In

Zeichen wenn $a^c = b$, so ist $c = \log \text{bas.} a \text{ num. } b$. Diese Bezeichnung pflegt in zwey Fällen eine Abkürzung zu bekommen. Es gibt zwey Potenzensysteme, von denen die Basis unabänderlich bestimmt, und ein für allemal bekannt ist: das natürliche Potenzensystem, und dasjenige von welchem 10 die Basis ist. Nun hat man die Logarithmen im ersten selbst natürliche oder hyperbolische, im zweyten künstliche oder gemeine zuweilen auch wohl briggische genannt. Wenn man also in dem natürlichen Potenzensystem frägt, was für eine Potenz eine beliebige Zahl sey, so drückt man dies aus: es soll ihr natürlicher Logarihme gefunden werden; im decadischen Potenzensysteme; ihr gemeiner oder künstlicher Logarithme. Wenn also z. E. $e^a = b$ wäre, und man a als unbekannt ansähe, so würde es heißen $a = \log \text{nat. } b$, oder auch wohl $a = \log b$ schlechthin; wenn $10^a = b$ wäre, $a = \log \text{vulg. } b$. In allen übrigen Fällen aber muß die anfängliche Art der Bezeichnung beybehalten werden. Zum Glück sind es in würklichen Rechnungen fast nur die natürlichen, und etwa zuweilen die gemeinen Logarithmen, womit man zu thun bekommt.

Es ist aus der Elementar-Arithmetik bekannt, daß die allgemeine Frage, was für eine Potenz von irgend einer gegebenen Zahl eine andre sey, wenn sie nur für ein einziges Potenzensystem aufgelöst werden kann, eben dadurch für jedes andre sehr leicht zu beantworten ist. Wir wollen sie deswegen zuerst für das natürliche Potenzensystem in Erwägung nehmen.

Der einfachste Ausdruck, welche man dem berechneten Werthe einer Potenz aus dem natürlichen System geben kann, wenn man ihn als eine zusammengesetzte, und die Hauptgröße künftiger Entwicklung enthaltende Größe ansehn will, ist $1 + x$. Wir fragen also zunächst, ob es möglich ist, eine nach Potenzen von x fortschreitende Form zu finden, so daß, wenn man sie zum Exponenten einer Potenz von e macht, der berechnete Werth dieser Potenz genau $1 + x$ werde.

Diese Aufgabe ist das Umgekehrte der Potenzirung. Ihre Auflösung kann also, wie allenthalben wo von umgekehrten Operationen die Rede ist, nur dadurch gegeben werden, daß man das Gesuchte als schon gefunden annimmt, um es rückwärts, durch Vergleichung mit dem Resultate, welches aus ihm hervorgehn soll, zu bestimmen.

Nun aber ist bey den Entwicklungen der Exponenzialgrößen gezeigt, daß die Exponenzialgröße $e^{\overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^{2} + \,..\, \overset{r}{a}x^{r} \,..}$ durch eine Reihe von der Form $A + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^{2} + \,..\, \overset{r}{A}x^{r} + \,..$ dargestellt werden könne, so daß $A = 1$ und $\overset{1}{A} = \overset{1}{a}$, und, wenn nach dem recurrirenden Zusammenhange der folgenden Coefficienten gefragt wird,

$$\overset{r}{A} = \frac{\overset{1}{a}\overset{r-1}{A} + 2\overset{2}{a}\overset{r-2}{A} \,..\, + k\overset{k}{a}\overset{r-k}{A} \,..\, + (r-1)\overset{r-1}{a}.\overset{1}{A} + r.\overset{r}{a}A}{r}$$

Wir sind also berechtigt, wenn wir die Form $\overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 .. + \overset{r}{a}x^r ..$ als eine vorläufig fingirte betrachten, $e^{\overset{1}{a}x * \overset{2}{a}x^2 .. * \overset{r}{a}x^r ..} = 1 + x$ zu setzen, und zu untersuchen, wie die Coefficienten $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, .. \overset{r}{a} ..$, eingerichtet werden müssen, damit dieser Forderung Genüge geschehe.

Ist mithin das Resultat, welches aus der würklichen Entwicklung von $e^{\overset{1}{a}x * \overset{2}{a}x^2 .. * \overset{r}{a}x^r ..}$ hervorgeht $= A + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 .. + \overset{r}{A}x^r ..$ so frägt sich, ob bewürkt werden kann, daß $A = 1$ (welches von selbst der Fall ist); daß $\overset{1}{A} = 1$ (weswegen, weil $\overset{1}{A} = \overset{1}{a}$, nur gesetzt zu werden braucht, daß $\overset{1}{a} = 1$ seyn soll); daß endlich jeder folgende Coefficient, wie $\overset{r}{A}$, wo r alle Werthe, von 2 an, bekommen darf $= 0$ sey? Denn alsdann wird in der That jene Reihe $A + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 .. + \overset{r}{A}x^r ..$, wie wir verlangen, $= 1 + x$.

Wenn jeder folgende Coefficient, außer $\overset{1}{A}$ und A, $= 0$ seyn soll, so reducirt sich der allgemeine Ausdruck ihres gegenseitigen Zusammenhangs

$$\overset{r}{A} = \frac{\overset{1}{a}\overset{r-1}{A} + 2\overset{2}{a}\overset{r-2}{A} .. + k\overset{k}{a}\overset{r-k}{A} .. + (r-1)\overset{r-1}{a}\overset{1}{A} + r\overset{r}{a}A}{r}$$

auf die nur aus 2 Gliedern bestehende Gleichung $0 = \frac{(r-1)\overset{r-1}{a}\overset{1}{A} + r\overset{r}{a}A}{r}$. Setzen wir in ihr für $\overset{1}{A}$

und A die schon bekannten Werthe $\overset{1}{A} = 1 = A$, so gibt sie $(r-1)\overset{r-1}{a} + r\overset{r}{a} = 0$, oder bequemer $\overset{r}{a} = -\frac{(r-1)}{r}\overset{r}{a}$. Und so stellt sich eine äußerst einfache Recursionsregel dar, die nur in Absicht auf die Coefficienten des fingirten Exponenten angenommen werden darf, damit der berechnete Werth seiner Potenz im natürlichen System würklich $1 + x$ werde.

Wir wissen schon, daß $\overset{1}{a} = 1$ seyn muß. Die folgenden Coefficienten finden sich aus unsrer Recursionsregel. Ihr gemäß wird $\overset{2}{a} = -\frac{1}{2}\overset{1}{a} = -\frac{1}{2}$; $\overset{3}{a} = -\frac{2}{3}\overset{2}{a} = +\frac{1}{3}$ u. s. w. Das independente Gesetz ist leicht zu ergreifen. Es werde angenommen, daß $\overset{r}{a} = (-1)^{r-1} \cdot \frac{1}{r}$. Alsdann wird $\overset{r+1}{a} = -(-1)^{r-1} \cdot \frac{r}{r+1}\overset{r}{a} = (-1)^{r} \cdot \frac{1}{r+1}$, welches die unbedingte Gültigkeit dieses für die ersten Coefficienten würklich statt findenden Gesetzes außer Zweifel setzt.

Unsre erste Aufgabe ist also aufgelöst. Soll $1 + x$ als Potenz von e betrachtet werden, so ist der Exponent, welcher dieser Potenz beygelegt werden muß, damit jene Annahme bestehe, d. h., in der gewöhnlichen Terminologie, es ist log. nat. $(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \ldots + (-1)^{r-1}\frac{x^r}{r} + \ldots$

Als ein besonders merkwürdiger Umstand verdient angeführt zu werden, daß die Reihe, wodurch sich

aus der Basis eines Potenzensystems, $1+a$, der Modulus ebendesselben berechnet, Modul. bas. $(1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + ..$ genau dieselbe ist, wonach sich vermöge der eben gefundenen Formel für die Zahl $1+a$ im natürlichen Potenzensystem der Exponent entwickeln würde. Wir dürfen also inskünftige statt Modul. bas. $(1+a)$ den geschlossenen arithmetischen Ausdruck, $\log nat (1+a)$ setzen, so daß folglich jezt die allgemeine Reihe

$$(1+a)^x = 1 + \overset{1}{A}x + \frac{\overset{2}{A}x^2}{1.2} .. + \overset{n}{A}x^n ..$$

wobey $A = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + ...$ war,

durch $(1+a)^x = 1 + [\log(1+a)].x + \frac{[\log(1+a]^2 x^2)}{1.2}$.

$$+ \frac{[\log(1+a)]^n x^n}{1.2..n} + ...$$

dargestellt werden kann. Und so zeigt sich ein neuer Grund, das natürliche Potenzen- oder Logarithmen-System als das wichtigste unter allen anzusehen. Selbst alsdann, wenn man irgend ein andres ursprünglich berechnen wollte, mischt es sich ein, und die Coefficienten der zur Berechnung nothwendigen Reihe sind eigentlich aus ihm hergenommen.

Der bisher betrachtete Fall der Exponenziirung im natürlichen System war eigentlich nur der einfachste. Mag jezt eine umbestimmt nach Potenzen von x fortschreitende Form genommen seyn, so daß gefragt wird, ob sie nicht eine Potenz von e ist, und

ob nicht ein ihr zugehöriger Exponent als eine ähnlich gebildete, von ihn abhängige Form, ausfindig gemacht werden kann. Diese Untersuchung führt sich im Allgemeinen beynahe leichter wie im einfachen Falle. Es sey $1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 .. + \overset{r}{A}x^r ..$ die gegebene Form; der ihr zugehörige vorläufig angenommene Exponent $\overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x .. + \overset{r}{a}x^r ..$ Es soll also $e^{\overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 .. + \overset{r}{a}x^r ..} = 1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 .. + \overset{r}{A}x^r ..$ seyn Nun aber haben wir, bey der Entwicklung der Exponenzialgrößen gesehn, daß $\overset{1}{a} = \overset{2}{A}$ ist, und daß allgemein

$$\overset{r}{A} = \frac{\overset{1}{a}\overset{r-1}{A} + 2\overset{2}{a}\overset{r-2}{A} .. + k\overset{k}{a}\overset{r-k}{A} .. + (r-1)\overset{r-1}{a}\overset{1}{A} + r\overset{r}{a}}{r}.$$

Wir brauchten vorhin diese Recursionsformel, um aus den Größen $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, .. \overset{r}{a}$, die wir als bekannt annahmen, die Größen $\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, .. \overset{r}{A}$, vermöge ihres gegenseitigen Zusammenhangs zu bestimmen. Sie läßt sich, nach einer leichten Veränderung, eben so gut im umgekehrten Sinne gebrauchen, und gibt alsdann

$$\overset{r}{a} = \frac{-(r-1).\overset{1}{A}.\overset{r-1}{a} - (r-2).\overset{2}{A}.\overset{r-2}{a} .. - k\overset{r-k}{A}.\overset{k}{a} .. - 2\overset{r-2}{A}\overset{2}{a} - \overset{r-1}{A}\overset{1}{a} + r\overset{r}{A}}{r}$$

die gesuchte Regel, vermöge deren also, für $\log(1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 .. + \overset{r}{A}x^r ..)$, wenn man dessen entwickelten Werth $= 1 + \overset{1}{a}x + \overset{1}{a}x^2 .. + \overset{r}{a}x^r ..$ setzt, jeder folgende Coefficient dieser gesuchten Reihe

(der erste $\overset{1}{a}$ ist $= \overset{1}{A}$) aus den vor ihm vorhergehenden gefunden werden kann.

Es ließe sich aus dieser Recursionsformel der independente Ausdruck jedes einzelnen Coefficienten ableiten. Man gelangt aber bequemer dazu, wenn man den gegenwärtigen zusammengesetzten Fall auf den ersten, einfacheren zurückbringt. Um $\log(1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \ldots \overset{r}{A}x^r \ldots)$ zu erhalten, setze man momentan $z = (\overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 \ldots + \overset{r}{A}x^r \ldots)$ Alsdann ist nur $\log(1+z)$ vorhanden, wovon der Werth durch die bekannte Reihe $\log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 \ldots (-1)^{r-1} \cdot \frac{1}{r} z^r \ldots$ dargestellt wird. Man setze in dieser für z seinen eigentlichen Werth zurück; entwickle jedes Glied nach Potenzen von x, und ziehe die daraus entspringenden Reihen in eine Summe zusammen. Diese Arbeit ist sehr leicht, und es sind ähnliche im Vorhergehenden schon oft genug vorgekommen, um uns zu berechtigen, hier das Resultat als auf den ersten Blick klar sogleich anzugeben. Die neue Reihe muß mit 1 anheben; in ihren successiven Gliedern die successiven Potenzen von x enthalten, so daß allgemein das n^{te}

$$= {}^{1..r}\overset{h}{\Sigma}\left((-1)^{h-1}\frac{1}{h}\,{}^{n}\overset{h}{C}\right)x^n$$ ist, angenommen, daß

die Coefficienten der gegebenen Form, $\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \ldots \overset{r}{A}, \ldots$ als combinatorische Elemente betrachtet werden.

Wir haben für das Anfangsglied der zu exponenzîirenden Form die Einheit genommen. Diese Voraussetzung scheint sehr partiell, aber man kommt bey jeder allgemeineren auf sie wieder zurück. Sollte $\log(Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+\delta} + Cx^{\alpha+2\delta}..)$ gefunden werden, so müßte zuerst die gegebene Form als Product von zwey Factoren, $Ax^{\alpha}\left(1 + \frac{B}{A}x^{\delta} + \frac{C}{A}x^{2\delta}..\right)$ dargestellt werden; ihr Logarithme würde alsdann $\log(Ax^{\alpha}) + \log\left(1 + \frac{B}{A}x^{\delta} + \frac{C}{A}x^{2\delta}..\right)$ in welchem Ausdrucke nur der zweyte Theil einer Entwicklung fähig ist.

Bisher ist nur von der Exponenzîirung einer angenommenen Form im natürlichen Potenzensystem die Rede gewesen. Der Uebergang von da zu jedem andern beliebigen Systeme ist leicht. Bekannten Lehren der Elementar-Arithmetik gemäß, ist $\log(1+x)$ bas. a $= \left(\frac{\log \text{nat.} [1+x]}{\log \text{nat. a}}\right)$, so daß also, wenn irgend eine Form als Potenz einer beliebigen bestimmten Basis a, betrachtet werden sollte, die Reihe ungeändert beybehalten werden könnte, wodurch ihr Logarithme im natürlichen System ausgedrückt wird, und nur der Divisor log a ihr beygegeben werden müßte. In Zeichen $\log(1+x)$ bas. a $= \frac{1}{\log \text{nat a}}(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4..)$

Jezt sind wir auch im Stande die höheren Exponenzialgrößen zu betrachten, bey denen Basis und

Exponent beyde Formen seyn sollten, welche nach Potenzen einer gewissen Hauptgröße fortgehn, $(1 + ax + bx^2 \,.\,.)^{(1 + \alpha x + \beta x^2 \,.\,.)}$. Nennt man Anfangs die Basis eines solchen Ausdrucks $(1 + B)$, und den Exponenten A, so reducirt er sich auf $(1 + B)^A$, gibt also die Reihe

$$1 + A \,.\, \log(1 + B) + \frac{A^2 [\log(1 + B)]^2}{1 \,.\, 2} \,.\,.$$

$\frac{A^r [\log(1 + B)]^r}{1 \,.\,.\, r} \,.\,.$ Nun ist A eine nach Potenzen von x fortschreitende Form; eben so kann $\log(1 + B) = \log(1 + ax + bx^2 \,.\,.)$ in eine solche aufgelöst werden. Und so erhellet die Möglichkeit, jedes einzelne Glied der Reihe für $(1 + B)^A$ in eine nach Potenzen von x fortschreitende Form umzusetzen, mithin die Summe von ihnen allen auf die gleiche Gestalt zurückzubringen. Es verlohnt sich aber nicht der Mühe, die vollständige Auflösung dieser verwickelten, obschon an sich leichten Rechnung beyzubringen, um so weniger, da kaum ein Fall vorkommen mögte, wo man Gebrauch von ihr zu machen hätte.

Die Formeln für die Entwicklung von Logarithmen und Exponenzialgrößen sind nicht bloß zum allgemeinen analytischen Gebrauch, sondern auch deswegen von so großer Wichtigkeit, weil durch ihre Hülfe die beyden bestimmten Potenzensysteme, welche wir in unsern Tafeln besitzen, berechnet worden sind. Sie bedürfen zu dieser Absicht mehrerer Modifica-

tionen; ihre Anwendung erfodert mancherley Kunstgriffe; der Inbegriff der dazu gehörigen Lehren pflegt Logarithmotechnie genannt zu werden. Sie beschränken sich meistens auf die Berechnung der natürlichen Logarithmen, da es eine sehr geringe Mühe macht, aus ihnen zu jeden andern System überzugehn. Es mag also zuerst davon eine zusammengezogene Darstellung gegeben werden.

Die einfache Grundreihe für die Berechnung der Logarithmen, $\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \ldots$, oder statt $+y$ gesetzt $-y$, $\log 1 - y = -(y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \ldots)$ ist von sehr geringer unmittelbarer Brauchbarkeit. Sie convergirt nur, wenn man für y echte Brüche setzt, und auch da nur dann schnell, wenn diese Brüche sehr klein sind; kann also höchstens für die Zahlen zwischen 0 und 2 ihre Logarithmen verschaffen. Aber diesem Fehler kann dadurch, daß man die Reihe mit sich selbst combinirt, sogleich abgeholfen werden. Bekanntlich ist $\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \log(1+y) - \log(1-y)$, mithin 1) $\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = 2(y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} + \ldots)$ Man kann die Gestalt dieser Formel für die Berechnung bequemer machen, indem man $\frac{1+y}{1-y} = z$ setzt, woraus umgekehrt $y = \frac{z-1}{z+1}$ folgt. Alsdann wird sie $\log z = 2\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3$

$+ \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5$ . . und so ist es klar, daß sie für alle Zahlen, die größer als 1 sind, eine Näherung gestattet. Denn $\frac{z-1}{z+1}$ wird allemal ein echter Bruch seyn, sobald z größer als 1 genommen ist. Aber diese Näherung ist doch nur alsdann einigermaßen beträchtlich, wenn z eine kleine Zahl seyn soll, und ohne besondre Kunstgriffe bey dem Gebrauche der Reihe würde man in große Weitläuftigkeiten gerathen. Hier nur einige von diesen Kunstgriffen als Proben.

Man setze in der Reihe

$$\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} \ldots$$

für $y = 5$, so enthält man

$$\log \frac{3}{2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \frac{1}{7.5^7} \ldots$$

ferner für $y = \frac{1}{7}$

$$\log \frac{4}{3} = \frac{1}{7} + \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} \ldots$$

für $x = \frac{1}{9}$

$$\log \frac{5}{4} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} \ldots$$

für $x = \frac{1}{99}$

$$\log \frac{50}{49} = \frac{1}{99} + \frac{1}{3.99^3} + \frac{1}{5.99^5} + \ldots$$

Aus diesen Logarithmen aber kann man durch leichte Verbindungen die der ersten zehn ganzen Zahlen sogleich hervorbringen.

Da $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2$, so gibt $\log \frac{4}{3} + \log \frac{3}{2} = \log 2$.
aus $2 \log 2$ findet sich $\log 4$; aus $2 \log 4$ entsteht $\log 8$.
$\frac{5}{4} \cdot 4 = 5$; mithin $\log \frac{5}{4} + \log 4 = \log 5$.

Ebenso wird $\log 2 + \log 3 = \log 6$; $2 \log 3 = \log 9$; $2 \log 5 = \log 10$ Endlich, da $\frac{50}{49} : 5 \cdot 10 = \frac{1}{49}$, so hat man $\log \frac{50}{49} - \log 5 - \log 10 = \log \frac{1}{49}$, mithin $\frac{1}{2} \log \frac{1}{49} = \log \frac{1}{7}$, wovon das Umgekehrte $\log 7$ seyn wird. Und so lassen sich durch schnell convergirende Zahlen die natürlichen Logarithmen der 10 ersten Zahlen finden.

Man kann aus der eben entwickelten Hauptformel mehrere andre ableiten, welche es möglich machen, die Logarithmen gewisser Zahlen zu berechnen, wenn man die der nächstgrößeren oder nächstkleineren Zahlen schon als bekannt annehmen darf.

Es sey z. E. $\frac{1+y}{1-y} = \frac{z}{z-1}$ mithin $y = \frac{1}{2z-1}$.
Es wird also $\log \frac{1+y}{1-y} = \log \frac{z}{z-1} = \log z - \log (z-1)$ seyn. Nun aber war $\log \frac{1+y}{1-y} = y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} ..$
Man erhält also 2) $\log z = \log (z-1) + \frac{1}{2z-1} + \frac{1}{3(2z-1)^3} + \frac{1}{5(2z-1)^5} \ldots$

Etwas Aehnliches ließe sich aus der Fundamentalformel $\log (1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} ..$ geradezu erhalten. Man setze in ihr für y an die Stelle $\frac{1}{z}$, so gibt sie
$\log (1 + \frac{1}{z}) = \log \frac{(z+1)}{z} = \log (z+1) - \log z = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} ..$

Mithin 3) $\log(z+1) = \log z + \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} \ldots$

Auf gleiche Weise findet sich aus der bekannten Grundreihe für $\log(1-y)$, die Formel

$$\log z = \log(z-1) + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} \ldots$$

Addirte man zu ihr die vorige

$$\log z = \log(z+1) - \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{3z^3} \ldots$$

so käme, die Hälfte der Summe genommen

4) $\log z = \frac{1}{2} \cdot \log(z-1) + \frac{1}{2}\log(z+1) + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4z^4} + \frac{1}{6z^6} \ldots$

Diese Reihe ist sehr brauchbar bey der Berechnung eines Potenzensystems. Denn man wird dabey ursprünglich nur die Logarithmen der absoluten Primzahlen durch die Anwendung unsrer Reihen zu finden haben; die aus ihnen zusammengesetzten erhalten ihre Logarithmen durch leichte Addition derjenigen, welche ihren Factoren gehören. Ist aber z eine Primzahl, so wird sowohl $(z-1)$ als $(z+1)$ aus Factoren zusammengesetzt seyn. Man darf also $\log(z-1)$ und $\log(z+1)$ schon als bekannt annehmen, wenn man $\log z$ berechnen will. Je größer z ist, desto brauchbarer wird unsre Formel. Eine ihr ganz ähnliche aber noch schneller convergirende Reihe könnte man aus der Formel 2) erhalten, wenn man nur in ihr für z setzen wollte z^2, hernach auf beyden Seiten durch 2 dividirend

5) $\log z = \frac{1}{2}\log(z+1) + \log(z-1) \frac{1}{(2z^2-1)} + \frac{1}{3(2z^2-1)^3} + \frac{1}{5(2z^2-1)^5} \ldots$

Eine andre Classe von Formeln macht es möglich, den Logarithmen einer zweytheiligen Größe aus dem ihres ersten Theils, und einigen Brüchen, die, aus beyden Theilen gebildet, zu ihm hinzugefügt werden, zusammenzusetzen. Es sey log (a + b) zu suchen, log a aber schon bekannt. Da $a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$ so ist $\log(a + b) = \log a + \log\left(1 + \frac{b}{a}\right)$, mithin, für den zweyten Theil seinen Werth gesetzt,

$$6)\ \log(a+b) = \log a + \frac{b}{a} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^4 \dots$$

Eine ähnliche noch brauchbarere Formel kann man aus der bekannten Reihe für $\log \frac{1+y}{1-y}$ (n. 1.) erhalten, wenn man ihr für y an die Stelle setzen will $\frac{b}{2b+a}$:

Alsdann gibt sie

$$\log\left(\frac{1 + \frac{b}{2a+b}}{1 - \frac{b}{2a+b}}\right) = \log\left(\frac{a+b}{a}\right) = \log(a+b)$$

— log a, mithin

$$7)\ \log(a+b) = \log a + 2.\left(\frac{a}{2b+a}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{a}{2b+a}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{a}{2b+a}\right)^5 \dots$$

Auf diese Formeln gründet sich der Gebrauch der Proportionaltheile in unsern gewöhnlichen Tafeln.

Noch eine andre Art von Kunstgriffen kommt darauf an, daß man, wenn von einer Zahl z, der Logarithme berechnet werden soll, ein Vielfaches von ihr, m z, zu finden weiß, welches um ein verhältnißmäßig Geringes, d, von einer Zahl abweicht, deren Logarithme als schon bekannt angenommen werden darf.

Denn wenn $mz = n + d = n\left(1 + \frac{d}{n}\right)$, so ist

$\log m + \log z = \log n + \log\left(1 + \frac{d}{n}\right)$; mithin

$$8)\ \log z = \log n - \log m + \frac{d}{n} - \frac{d^2}{2n^2} + \frac{d^3}{3n^3} - \frac{d^4}{4n^4} \ldots$$

Es versteht sich daß d auch eine negative Zahl seyn darf.

Alle diese und ähnliche Methoden finden aber nur alsdann eine Anwendung, wenn man schon von gewissen Zahlen die Logarithmen hat, und aus ihnen die von andern berechnen will. Sie sind sehr brauchbar bey der Berechnung eines vollständigen Logarithmen-Systems; aber sie helfen wenig, wenn für einzelne, isolirte Zahlen die Logarithmen gefunden werden sollen. Da dieser Fall indessen sehr wohl vorkommen kann, so ist eine andre Methode nicht überflüssig, durch deren Hülfe auch für den lezten Fall Rath geschafft werden kann.

Diese Methode, eine der ältesten unter denen, welche bey würklicher Berechnung der Logarithmen gebraucht worden sind, sezt voraus, daß man die Logarithmen der successiven Potenzen von 10; die der 9 ersten ganzen Zahlen, und die der unechten Brüche von 1, 1; 1, 2, .. 1, 9; eben so der von 1, 01; .. 1,09; allgemein der unechten Brüche von der Form $1 + \frac{a}{10^n}$, wo a alle Werthe von 1 bis 9 haben kann, n bis zu der Zahl aufsteigen muß, welche die Menge von Decimalstellen anzeigt, bis zu welcher die Berechnung getrieben werden soll. Eine Tabelle, welche alle diese Logarithmen enthält, ist leicht berechnet, weil zu ihr die erste Grundreihe für log $(1 + y)$ unmittelbar gebraucht werden darf. Sie wird am besten für jedes

Potenzensystem besonders berechnet, und mag hier, da sie auf einen geringen Raum zusammengedrängt werden kann, sowohl für das natürliche, als für das gemeine Logarithmensystem ihre Stelle finden.

I. Hülfstabelle zur Berechnung der Logarithmen im briggischen System.

	Zahl.	Logarithme.		Zahl.	Logarithme.
	9	95424 25094 39324 87459	1,000	9	00039 06892 49910 13103
	8	90308 99869 91943 58564		8	00034 72966 85363 54069
	7	84509 80400 14256 83071		7	00030 38997 84812 49181
	6	77815 12503 83643 63251		6	00026 04985 47390 34682
	5	69897 00043 36018 80479		5	00021 70929 72230 20828
	4	60205 99913 27962 39043		4	00017 36830 58464 91882
	3	47712 12547 19662 43730		3	00013 02688 05227 06100
	2	30102 99956 63981 19521		2	00008 68502 11648 95723
				1	00004 34272 76862 66964
1,	9	27875 36009 52828 96154	1,0000	9	00003 90847 44584 16739
	8	25527 25051 03306 06980		8	00003 47421 68884 03320
	7	23044 89213 78273 92854		7	00003 03995 49761 39869
	6	20411 99826 55924 78085		6	00002 60568 87215 39548
	5	17609 12590 55681 24208		5	00002 17141 81245 15514
	4	14612 90356 78238 02593		4	00001 73714 31849 80922
	3	11394 33523 06836 76921		3	00001 30286 39028 48926
	2	07918 12460 47624 82772		2	00000 86858 02780 32676
	1	04139 26851 58225 04075		1	00000 43429 23104 45319
1,0	9	03742 64979 40623 63520	1,00000	9	00000 39086 32748 30828
	8	03342 37554 86949 70231		8	— — 34743 41957 87671
	7	02938 37776 85209 64083		7	— — 30400 50733 15761
	6	02530 58652 64770 24085		6	— — 26057 59074 15011
	5	02118 92990 69938 07279		5	— — 21714 66980 85333
	4	01703 33392 98780 35485		4	— — 17371 74433 26642
	3	01283 72247 05172 20517		3	— — 13028 81491 38850
	2	00860 01717 61917 56105		2	— — 08685 88095 21870
	1	00432 13737 82642 57428		1	— — 04342 94264 75016
1,00	9	00389 11662 36910 52172	1,000000	9	00000 03908 64857 82377
	8	00346 05321 09506 48616		8	— — 03474 35446 54844
	7	00302 94705 53618 00717		7	— — 03040 06030 93018
	6	00259 79807 19908 59231		6	— — 02605 76610 96898
	5	00216 60617 56507 67623		5	— — 02171 47186 66483
	4	00173 37128 09000 52977		4	— — 01737 17758 01775
	3	00130 09330 20418 11880		3	— — 01302 88325 02773
	2	00086 77215 31226 91249		2	— — 00868 58887 69476
	1	00043 40774 79318 64267		1	— — 00434 29446 01885

Zahl.		Logarithme.	Zahl.		Logarithme.
1,000000	9	00000 00390 86501 61240	1,00000000	9	00000 00003 90865 03354
	8	— — 00347 43557 16252		8	— — 00003 47435 38538
	7	— — 00304 00612 66921		7	— — 00003 04006 13723
	6	— — 00250 57668 13247		6	— — 00002 60576 68906
	5	— — 00217 14723 55229		5	— — 00002 17147 24[illegible]90
	4	— — 00173 71778 92869		4	— — 00001 73717 79273
	3	— — 00130 28834 26167		3	— — 00001 30288 34455
	2	— — 00086 85889 55121		2	— — 00000 86858 89637
	1	— — 00043 42944 79732		1	— — 00000 43429 44819
1,0000000	9	00000 00039 08650 31954	1,000000000	9	00000 00000 39086 50337
	8	— — 00034 74355 84133		8	— — — — 34743 55855
	7	— — 00030 40061 36268		7	— — — — 30400 61573
	6	— — 00026 05766 88360		6	— — — — 26057 66891
	5	— — 00021 71472 40409		5	— — — — 21714 72409
	4	— — 00017 37177 92414		4	— — — — 17371 77928
	3	— — 00013 02883 44376		3	— — — — 13628 83446
	2	— — 00008 68588 96294		2	— — — — 08685 88964
	1	— — 00004 34294 48169		1	— — — — 04342 94482

II. Hülfstabelle zur Berechnung natürlicher Logarithmen.

Zahl.	Logarithme.
1 00000 00000 00000 00000	46,05170 18598 80913 68036
10000 — — — —	43,74911 67668 86867 99634
1000 — — — —	41,44653 16738 92822 31232
100 — — — —	39,14594 65808 98776 62831
10 — — — —	36,84136 14879 04730 94429
1 00000 00000 00000	34,53877 63949 10685 26027
10000 — — —	32,23619 13019 16639 57625
1000 — — —	29 93360 62089 22593 89223
100 — — —	27,63102 11159 28548 20822
10 — — —	25.32843 60229 34502 52420
1 00000 00000	23,02585 09299 40456 84018
10000 —	20,82326 58369 46411 15616
1000 —	18.42068 07439 52365 47214
100 —	16,11809 56509 58319 78813
10 —	13,81551 05579 64274 10411
1 00000	11,51292 54649 70228 42009
10000	9,21034 03719 76182 73607
1000	6,90775 52789 82137 05205
100	4,60517 01859 88091 36804
10	2,30258 50929 94045 68402

	Zahl.	Logarithme.		Zahl.	Logarithme.
	9	2,19722 45773 36219 38279		9	0,00008 99959 50242 98360
	8	2,07944 15416 79835 92825		8	0,00007 99968 00170 55643
	7	1,94501 01490 55313 30511		7	0,00006 99975 50114 32734
	6	1,79175 94692 28055 00081		6	0,00005 99982 00071 99676
	5	1,60943 79124 34100 37460	1,0000	5	0,00004 99987 50041 66511
	4	1,38629 43611 19890 61883		4	0,00003 99992 00021 33269
	3	1,09861 22886 68109 69140		3	0,00002 99995 50008 99979
	2	0,69314 71805 59945 30942		2	0,00001 99998 00002 66663
				1	0,00000 99999 50000 33333
	9	0,64185 38861 72394 77599		9	0,00000 89999 59500 24300
	8	0,58778 56649 02119 00819		8	— — 79999 68000 17067
	7	0,53062 82510 62170 39623		7	— — 69999 75500 11433
	6	0,47000 36292 45735 55365		6	— — 59999 82000 07200
1,	5	0,40546 51081 08164 38198	1,00000	5	— — 49999 87500 04167
	4	0,33647 22366 21212 93050		4	— — 39999 92000 02133
	3	0,26236 42644 67491 05204		3	— — 29999 95500 00900
	2	0,18232 15567 93954 62621		2	— — 19999 98000 00267
	1	0,09531 01798 04324 86004		1	— — 09999 99500 00033
	9	0,08617 76962 41052 33234		9	0,00000 08999 99595 00024
	8	0,07696 10411 39128 32498		8	— — 67999 99680 00017
	7	0,06765 86484 73814 80527		7	— — 06999 99755 00011
	6	0,05826 89081 23975 77553		6	— — 05999 99820 00007
1,0	5	0,04879 01641 60432 00307	1,000000	5	— — 04999 99875 00004
	4	0,03922 07131 53281 29627		4	— — 03999 99920 00002
	3	0,02955 88022 41544 40273		3	— — 02999 99955 00001
	2	0,01980 26272 96179 71303		2	— — 01999 99980 00000
	1	0,00995 03308 53168 08285		1	— — 00999 99995 00000
	9	0,00895 97413 71471 90444		9	1,00000 00899 99995 95000
	8	0,00796 81696 49176 87351		8	— — 00799 99996 80000
	7	0,00697 56137 36425 24210		7	— — 00699 99997 55000
	6	0,00598 20716 77547 46378		6	— — 00599 99998 20000
1,00	5	0,00498 75415 11039 07361	1,0000000	5	— — 00499 99998 75000
	4	0,00399 20212 69537 45300		4	— — 00399 99999 20000
	3	0,00299 55089 79798 47881		3	— — 00299 99999 55000
	2	0,00199 80026 62675 05602		2	— — 00199 99999 80000
	1	0,00099 95003 33083 53317		1	— — 00099 99999 95000
	9	0,00089 95952 42836 02301		9	0,00000 00089 99999 95950
	8	0,00079 96801 70564 33216		8	— — 00079 99999 96800
	7	0,00069 97551 14273 34191		7	— — 00069 99999 97550
	6	0,00059 98200 71967 61553		6	— — 00059 99999 98200
1,000	5	0,00049 98750 41651 04792	1,00000000	5	— — 00049 99999 98750
	4	0,00039 99200 21326 93537		4	— — 00039 99999 99200
	3	0,00029 99550 08997 97548		3	— — 00029 99999 99550
	2	0,00019 99800 02666 26672		2	— — 00019 99999 99800
	1	0,00009 99950 00333 30834		1	— — 00009 99999 99950

	Zahl.	Logarithme.		Zahl.	Logarithme.
1,000000000	9	0,00000 00008 99999 99959	1,000000000	9	0,00000 00000 90000 00000
	8	— — 00007 99999 99968		8	— — — — 80000 00000
	7	— — 00006 99999 99975		7	— — — — 70000 00000
	6	— — 00005 99999 99982		6	— — — — 60000 00000
	5	— — 00004 99999 99987		5	— — — — 50000 00000
	4	— — 00003 99999 99992		4	— — — — 40000 00000
	3	— — 00002 99999 99995		3	— — — — 30000 00000
	2	— — 00001 99999 99998		2	— — — — 20000 00000
	1	— — 00000 99999 99999		1	— — — — 10000 00000

Diese Tabelle vorausgesetzt, kann man in beyden Systemen für alle Zahlen, die nicht über 10 Ziffern hinausgehn, bis auf doppelt so viele Decimalstellen den Logarithmen sehr leicht erhalten, sobald man im Stande ist, die gegebene Zahl in Factoren der angenommenen Form aufzulösen, und es wird, dies geschehen, nichts als einer Addition ihrer aus der Tabelle bekannten Logarithmen erforderlich seyn.

Regeln aber, um eine Zahl in ein Product aus Factoren aufzulösen, von denen der erste eine Potenz von 10, der zweyte eine einfache Ziffer, der dritte von der Form $1 + \frac{a}{10}$; der 4te von der Form $1 + \frac{a}{100}$ u. s. w. allgemein der n^{te} nach dem zweyten von der Form $1 + \frac{a}{10^n}$ seyn soll, unter a irgend eine einfache Ziffer gedacht, sind nicht schwer zu entdecken. Es kann für unsre Absicht genug seyn, nur eine solche, in der Ausübung besonders bequeme entwickelt zu haben. Sie kommt darauf zurück, daß man ein Product aus Factoren von der Form $(1 + \frac{a}{10})$ allmälig zu erhalten sucht,

welches, in die beliebig angenommene Zahl multiplicirt, als Factum eine einzige Ziffer hervorbringt.

Dividirt man eine vielziffrige Zahl durch ihre, um eine Einheit erhöhte, Anfangsziffer, mit Beybehaltung des Ranges, welchen sie besitzt, so erscheint sie als ein Product aus zwey Factoren, von denen der erste jene Rang besitzende Ziffer, der zweyte ein echter Bruch, wenig von der Einheit verschieden, seyn wird. Sie ist dadurch, wenn a eine einfache Ziffer, B einen echten Decimalbruch bedeutet, auf die Form $A = a \cdot 10^n \cdot B$, gebracht. Könnte man nun einen Factor, oder einen Inbegriff von Factoren, f, finden, welcher $B \cdot f = 1$ machte, und wäre der Logarithme eines solchen Factors schon bekannt, wie der von der einfachen Ziffer a, und der von 10^n, so hätte man den Logarithmen der Zahl. Denn es wird, der Annahme gemäß $A f = a\, 10^n \cdot B f = a \cdot 10^n$ seyn. Mithin $A = \frac{a \cdot 10^n}{f}$; also $\log A = \log (a \cdot 10^n) - \log f$. Die ganze Frage kommt also jezt auf Folgendes zurück. Man hat einen Decimalbruch von der Form $1 - \left(\frac{a}{10^n} + \frac{b\, ..}{10^{n+1}}\right)$ Man sucht einen Factor von der Form $1 + \frac{\alpha}{10^n}$, so daß das Product von beyden so nahe als möglich, und auf allen Fall näher als sein erster Factor, an 1 rücke. Die würkliche Multiplication der beyden Factoren gibt $1 - \left(\frac{a + \alpha}{10^n} + \frac{b\, ..}{10^{n+1}}\right)$ Es wird dem gemäß, so

nahe als möglich an 1 gerückt seyn, (angenommen, daß es immer unter 1 bleiben soll, wenn $a + \alpha = 9$ geben, weil $\frac{9}{10^n}$ das Höchste vom Range n ist, was von 1 abgezogen werden darf, falls noch andre Ziffern von folgenden Rängen vorhanden sind, die gleichfalls abgezogen werden sollen, und man sicher bleiben will, daß nie zuviel abgezogen werde. Daher die Regel: Hat man einen Decimalbruch, und verlangt man einen Factor, dessen erster Theil 1, der zweyte ein einfacher Decimalbruch seyn soll, um jenen gegebenen durch Multiplication so nahe an 1 zu führen, als es mit Sicherheit im Allgemeinen geschehn kann, so muß der Zähler dieses einfachen Decimalbruchs die Ergänzung zu 9 für die höchste Ziffer in dem gegebenen Decimalbruche, welche noch nicht selbst = 9 ist; sein Nenner muß von demselben Range mit dem jener höchsten Ziffer seyn. Diese Regel allmälig immer fort anwendend, bekommt man sehr leicht eine Reihe von Factoren der verlangten Form, welche einen gegebenen echten Decimalbruch, so nahe als man will, auf 1 zurückbringen.

Soll z. E. für die Zahl 370072 der Logarithme auf 7 Decimalstellen berechnet werden, so dividire man sie erst durch 400000, und suche nachher, auf die vorhin angegebene Weise, die Factoren von der Form $(1 + \frac{a}{10^n})$, welche den durch die erste Division entstandenen Bruch bis auf 7 Decimalstellen mit 1 übereinstimmend machen. Man wird die einzelnen Mul-

tiplicationen nicht weiter zu treiben brauchen, als bis man sicher seyn kann, jenes Product auf 7 Decimalstellen genau erhalten zu haben.

Nun ist $\frac{370072}{400000} = 0{,}92518$. Dieser Bruch ist es also, welcher, durch successive Multiplicationen der Einheit genähert werden soll

	0,92518
Erster Factor	1,07
Product	0,9899426
Zweyter Factor	1,01
Product	0,99984202
Dritter Factor	1,0001
Product	0,99994200
Vierter Factor	1,00005
Product	0,99999200
Fünfter Factor	1,000007
Product	0,9999990

Dieses letzte Product ist aber von 1 erst in der siebten Decimalstelle verschieden.

Man hat also jezt

$\frac{370072}{400000} \cdot (1{,}07) \cdot (1{,}01) \cdot (1{,}0001) \cdot (1{,}00005) \cdot (1{,}000007) \cdot (1{,}00000009) = 1$. Und nun kann sogleich der Logarithme unsrer Zahl 370072 durch eine leichte Addition gefunden werden.

Es ist nach der Tabelle für briggische Logarithmen

log 1,07	=	0,02938377
1,01	=	0,00432137
1,0001	=	0,00004342
1,00005	=	0,00002171
1,000007	=	0,00000304
1,0000009	=	0,00000039
		0,03377368

abgezogen von

log 400000	=	5,6020599
log 370072	=	5,5682863

wie in den gemeinen Tafeln.

Man hätte eben so leicht, aus der ersten Hülfstabelle, den natürlichen Logarithmen der gegebenen Zahl erhalten können, nur daß es nöthig gewesen wäre, den log 400000 durch Addition der beyden für 4 und 100000 in der Tabelle würklich befindlichen erst zu erzeugen.

log 1,07	=	0,06765864
1,01	=	0,00995033
1,0001	=	0,00009999
1,00005	=	0,00004999
1,000007	=	0,00000699
1,0000009	=	0,00000089
		0,07776683
abzuziehn von log 4	=	1,38629436
+ log 100000		11,51292546
		12,89921982
log nat 370072	=	12,82145299

Es bedarf wohl keiner ausführlichen Auseinandersetzung, daß unsre Hülfstabellen eben so bequem sind, um die umgekehrte Frage, zu einem Logarithmen die zugehörige Zahl zu berechnen, sogleich zu beantworten. Sie geben, durch leichte Abziehung der größtmöglichen in ihnen stehenden Logarithmen von dem gegebenen, sogleich die Factoren von der Form $(1 + \frac{a}{10^n})$ welche in der gesuchten Zahl enthalten sind, und die fast mit gar keiner Mühe zu vollziehende Multiplication dieser Factoren bringt die gesuchte Zahl selbst hervor.

Ueberhaupt lassen sich bey dem ganzen Verfahren noch mancherley Abkürzungen und Vortheile anbringen, deren Darstellung aber an dieser Stelle unzweckmäßig seyn mögte.

Zwölftes Kapitel.

Theorie der Exponenzialgrößen mit unmöglichen Exponenten.

Die Vortheile, welche ein vollständig berechnetes Potenzensystem in allen verwickelten Rechnungen gewährt, erscheinen bey bestimmten möglichen Zahlen, als von welchen allein in unsern gewöhnlichen Potenzensystemen die Rede ist, so bedeutend, daß die Idee, sich ebenderselben für alle arithmetische Formen, die aus Verbindungen bestimmter Zahlen durch vorge-

schriebene arithmetische Operationen erwachsen, zu bedienen, sich von selbst aufdringt. Dabey aber machen die arithmetischen Ausdrücke, welche Etwas verlangen, was der Natur der arithmetischen Operationen widerspricht, die sogenannten unmöglichen Größen, einige Schwierigkeit. Man rechnet bekanntlich mit solchen Ausdrücken, als wenn ihre Resultate Zahlen, sie selbst also den Regeln der Zahlenverknüpfung unterworfen wären; ein unbedenkliches, untadelhaftes, Verfahren, sobald man nur nicht vergißt, die Resultate der Rechnung hypothetisch auszusprechen. Insofern also kann man, um den Werth einer Exponenzialgröße, deren Exponent ein unmöglicher Ausdruck seyn soll, zu finden, sich geradezu der vorhin abgeleiteten Exponenzialreihe bedienen; oder um den Logarithmen eines ähnlichen zu erhalten, die bekannte logarithmische Reihe in Anwendung setzen. Aber, wenn man in jedem, einzeln vorkommenden, Falle, genöthigt seyn sollte, die Entwicklungen auf diese Art erst zu machen, um die gegebenen Formen als Potenzen aus dem nemlichen System betrachten, und so der Bequemlichkeiten der Potenzenrechnung theilhaftig machen zu können, so würde eben so wenig Vortheil bey dem ganzen Verfahren seyn, wie bey der gewöhnlichen Rechnung mit den Logarithmen, wenn gar keine logarithmische Tafeln vorhanden wären.

Es frägt sich also, ob nicht eine solche Erweiterung eines beliebig angenommenen, am einfachsten: des natürlichen Potenzensystems, möglich ist, daß man

in ihm, für jeden Exponenten, welcher als ein unmöglicher Ausdruck angenommen seyn mag, den berechneten Werth; und umgekehrt für jeden unmöglichen Ausdruck wenn man ihn als Potenz betrachten will, den zugehörigen Exponenten (oder Logarithmen) finden kann. Es frägt sich, ob nicht Tabellen möglich sind, durch deren Hülfe für beyde Fälle das Verlangte ohne alle Rechnung unmittelbar abgenommen werden kann.

Diese Frage scheint Anfangs von einem so unendlichen Umfange, daß man sich geneigt fühlen mögte, sie abzuweisen. Aber die genauere Untersuchung vereinfacht sie bald. Ein glücklicher Zufall hat uns Tafeln, zu ganz andern als den gegenwärtigen arithmetischen Absichten entworfen, von viel geringerem Umfang als die gewöhnlichen logarithmischen, längst in die Hände gegeben, welche es möglich machen, unmögliche Formen augenblicklich in Exponenzialgrößen umzusetzen, und umgekehrt. Und durch ihre Hülfe gelangen wir sehr leicht dazu, die verwickeltsten Rechnungen mit unmöglichen Ausdrücken auf einen Mechanismus zurückzuführen, der so einfach und umfassend erscheint, daß er als einer der schönsten Theile in der allgemeinen Arithmetik betrachtet werden darf.

Wir machen den Anfang der Untersuchung mit dem einfachsten Falle. Die Arithmetik führt zuerst auf unmögliche Ausdrücke bey der Ausziehung der Quadratwurzel aus einer negativen Zahl; $a\sqrt{-1}$ ist die erste und einfachste Form, unter welcher jene Aus-

drücke erscheinen. Wir wollen also zuerst erforschen, auf welche Weise der Werth einer Exponenzialgröße im natürlichen System, die einen solchen Exponenten erhalten hätte, sich berechnen müßte, und alsdann, was dazu gehören würde, wenn man eine Tabelle der berechneten Werthe solcher Exponenzialgrößen entwerfen wollte.

Wenn wir in der bekannten Exponenzialreihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} \ldots + \frac{x^n}{1.2..n} + \ldots$$

für x den Werth $a\sqrt{-1}$ setzen, so gibt sie

$$e^{a\sqrt{-1}} = 1 + (a\sqrt{-1}) + \frac{(a\sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(a\sqrt{-1})^3}{1.2.3} \ldots + \frac{(a\sqrt{-1})^n}{1.2..n} + .$$

Offenbar sind die Glieder dieser Reihe abwechselnd möglich und unmöglich; will man sie also zusammenziehn, so müssen die von gerader Zahl, Mögliches enthaltend, für sich, und die von ungerader Zahl, sämtlich in $\sqrt{-1}$ multiplicirt, wieder für sich, zusammengenommen werden. So entsteht

$$e^{a\sqrt{-1}} = \left(1 - \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^4}{1.2.3.4} \ldots + (-1)^n \frac{a^{2n}}{1.2..2n} \ldots\right)$$

$$+ \left(a - \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2..5} \ldots + (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{1.2..(2n+1)} \ldots\right)\sqrt{-1}$$

Wir wollen für die Reihe

$$1 - \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^4}{1.2.3.4} \ldots (-1)^n \frac{a^{2n}}{1..2n} \ldots$$

weil sie eine von der Zahl a abhängige Größe bedeutet (eine Größe, welche sich durch die Reihe selbst, weil dieselbe für jeden Werth von a convergent ist, allemal näherungsweise berechnen lassen wird) eine eigenthümliche Benennung, etwa Cosinus der Zahl a (Cosin a)

einführen, und eben so für die Reihe

$$a - \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2..5} .. + (-1)^n . \frac{a^{2n-1}}{1.2..(2n-1)} ..$$

eine ähnliche Benennung, Sinus der Zahl a (Sin a). Alsdann können wir abgekürzt

$$e^{a\sqrt{-1}} = \cos a + \sin a . \sqrt{-1} \text{ setzen.}$$

Eigentlich liegt in dem Ausdruck $e^{a\sqrt{-1}}$ eine Zweydeutigkeit, weil die Größe $\sqrt{-1}$, der Fiction gemäß, als eine darstellbare gedacht, entweder positiv oder negativ genommen werden könnte. Indessen liegt eine correspondirende Zweydeutigkeit in der ihn entwickelnden Reihe, so daß, genauer bestimmt,

$$e^{+a\sqrt{-1}} = \cos a + \sin a \sqrt{-1}$$

$$e^{-a\sqrt{-1}} = \cos a - \sin a \sqrt{-1}$$

gesetzt werden könnte. Auf diese Weise wird es sogleich möglich, die Bedeutung von dem, was Sinus und Cosinus einer Zahl heißen soll, nicht, wie es anfangs geschah, durch Reihen, sondern mittelst geschlossener arithmetischer Ausdrücke anzugeben. Die Addition jener beyden Formen gibt sogleich

$$\frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2} = \cos a$$

Ebenso, mit einer leichten Modification die Abziehung

$$\frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin a$$

Diese Ausdrücke helfen nicht, für einzelne beliebige Werthe der Zahl, a, die zugehörigen ihrer Sinus und Cosinus zu berechnen, sondern es muß dieses, wenn es verlangt werden sollte, durch die anfänglich

gegebenen Reihen geschehn. Aber sie sind, um allgemeine Beziehungen zwischen den Sinus und Cosinus zu finden, von großer Erheblichkeit, wie sich sogleich in näherer Betrachtung zeigen wird.

Unsre Hauptabsicht ist, die Werthe der Exponenzialgröße $e^{a\sqrt{-1}}$ für alle successiven Werthe des Exponenten, d. h. der Zahl a, allmälig zu berechnen. Es scheint also, als müßten wir für jeden einzelnen Fall zuerst den Betrag der Reihe für sin a, und hernach den der Reihe für cos a berechnen, um $e^{a\sqrt{-1}} = \cos a + \sin a . \sqrt{-1}$ zu erhalten. Dies gäbe also doppelt so viel Arbeit, als die Entwicklung möglicher Exponenzialgrößen. Und wenn, wie es scheint, für positive und negative Werthe von a, für ganze und gebrochene, die Rechnung jedesmal besonders geführt werden müßte, so würde die Ausarbeitung eines Potenzensystems von der Form $e^{a\sqrt{-1}}$ nur für die nemlichen Werthe von a, für welche das von der Form e^a würklich vorhanden ist, ein Geschäft von beynahe unermeßlichem Umfang werden.

Es zeigt sich aber bald, daß erstlich nur der Cosinus einer Zahl berechnet zu werden braucht, und daß alsdann der Sinus ebenderselben aus ihm leicht abgeleitet werden kann; und daß zweytens die Werthe der Sinus und Cosinus nur für gewisse positive, innerhalb sehr enger Grenzen liegende, Zahlen berechnet zu werden brauchen, um dieselben für alle übrigen, sie mögen so groß seyn, als man will, ohne alle fernere Arbeit zu erhalten.

Was das erste betrifft, so zeigt sich dem nicht ganz ungeübten Auge, bey der Betrachtung der geschlossenen Ausdrücke für sin a und cos a, sogleich ein bestimmter arithmetischer Zusammenhang. Man erhebe $\sin a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ zum Quadrat. Es entsteht

$$\sin a^2 = \frac{e^{2a\sqrt{-1}} - 2e^{a\sqrt{-1}}.e^{-a\sqrt{-1}} + e^{-2a\sqrt{-1}}}{-4}$$

$$= \frac{-e^{2a\sqrt{-1}} - 2 + e^{2a\sqrt{-1}}}{4}.$$

Eben so gibt

$$\cos a^2 = \left(\frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2a\sqrt{-1}} + 2 + e^{-2a\sqrt{-1}}}{4}$$

Mithin $\sin a^2 + \cos a^2 = 1$, und also entweder $\sin a = \sqrt{(1 - \cos a^2)}$, oder $\cos a = \sqrt{(1 - \sin a^2)}$. Man kann folglich aus dem einen sehr leicht das andre berechnen.

Was das zweyte anlangt, so ist erstlich klar, daß man nur für positive Zahlen die Sinus und Cosinus zu berechnen braucht. Denn wenn $\sin a = \frac{e^{+a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$

so ist $\sin(-a) = \frac{e^{-a\sqrt{-1}} - e^{+a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ mithin $\sin(-a) = -\sin a$.

Und da $\cos a = \frac{e^{+a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2}$, so ist

$\cos(-a) = \frac{e^{-a\sqrt{-1}} + e^{+a\sqrt{-1}}}{2}$ folglich $\cos(-a) = \cos a$.

Ferner ergibt eine etwas genauere Betrachtung, daß es nicht für jede Zahl nöthig ist, unmittelbar ihren

Sinus und Cosinus zu berechnen, sondern daß, wenn sie selbst aus andern zusammengesetzt ist, jene Größen aus den ähnlich benannten für die Zahlen, woraus sie sich zusammengesetzt hat, abgeleitet werden können. Der Fundamentalsatz für alle darauf Beziehung habende Regeln betrifft Sinus und Cosinus einer Zahl, welche die Summe zweyer andern seyn soll. Es ist

$$\sin a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}};\ \cos a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\cos b = \frac{e^{b\sqrt{-1}} + e^{-b\sqrt{-1}}}{2};\ \sin b = \frac{e^{b\sqrt{-1}} - e^{-b\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

Mithin $\sin a \cos b$

$$= \frac{e^{(a+b)\sqrt{-1}} - e^{(a-b)\sqrt{-1}} + e^{(b-a)\sqrt{-1}} - e^{-(a+b)\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}}$$

und $\cos a \sin b$

$$= \frac{e^{(a+b)\sqrt{-1}} - e^{(a-b)\sqrt{-1}} + e^{(b-a)\sqrt{-1}} - e^{-(a+b)\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}}$$

Mithin addirt

$$1)\ \sin a \cos b + \cos a . \sin b = \frac{e^{(a+b)\sqrt{-1}} - e^{-(a+b)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$= \sin (a+b)$$

Man erhält auf die nemliche Weise

$\cos a . \cos b$

$$= \frac{e^{(a+b)\sqrt{-1}} + e^{(a-b)\sqrt{-1}} + e^{(b-a)\sqrt{-1}} + e^{-(a+b)\sqrt{-1}}}{4}$$

$$\sin a \sin b = \frac{e^{(a+b)\sqrt{-1}} - e^{(a-b)\sqrt{-1}} - e^{(b-a)\sqrt{-1}} + e^{-(a+b)\sqrt{-1}}}{-4}$$

Folglich subtrahirt

2) $\cos a \cos b - \sin a \sin b$

$$= \frac{e^{(a+b)\sqrt{-1}} + e^{-(a+b)\sqrt{-1}}}{2} = \cos (a+b)$$

Diese beyden Formeln

1) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

2) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

woraus sogleich, indem man für b setzt − b,

3) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

4) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

erfolgen, sind Grundformeln für die Berechnung der Sinus und Cosinus gewisser Zahlen aus denen von andern. Es lassen sich aus ihnen unzählig viele andre ableiten, von denen hier nur die für unsre nächste Absicht brauchbaren vorkommen mögen

Man setze $a = b$, so ergibt sich

$\sin 2a = 2 \sin a . \cos a$, und $\cos 2a = \cos a^2 - \sin a^2$

Man setze ferner $b = 2a$, so erhält man

$\sin(2a + a) = \sin 3a = \sin a \cos 2a + \cos a . \sin 2a$

Wenn in dieser lezten Formel für $\cos 2a$ und $\sin 2a$ ihre schon gefundenen Werthe substituirt werden, so wird

$\sin 3a = 3 \cos a^2 \sin a - \sin a^3$

Ebenso erhält man $\cos(a + 2a) = \cos a . \cos 2a - \sin a . \sin 2a$

und wenn darin dieselbe Substitution gemacht wird

$\cos 3a = \cos a^3 - 3 \cos a . \sin a^2$

Es ist hauptsächlich die lezte unter diesen speciellen Formeln, wovon im Folgenden ein besondrer Gebrauch gemacht wird. Und zwar wollen wir $3a = p$, mithin $a = \frac{1}{3}p$ in ihr setzen, um ihr zu der nachherigen Absicht die bequemste Gestalt zu ertheilen. So gibt sie also

5) $\cos p = (\cos \frac{1}{3} p)^3 - 3 (\sin \frac{1}{2} p)^2 (\cos \frac{1}{3} p)$

Aus den Grundformeln sebst erhellet auf den ersten Blick, daß nicht alle Sinus und Cosinus verschiedener Zahlen ursprünglich berechnet zu werden brauchen. Es scheint aber doch selbst nach ihnen, daß verschiedene Zahlen auch verschiedene Sinus und Cosinus erhalten werden, in welchem Falle die Arbeit einer vollständigen Berechnung noch immer von beträchtlichem Umfang bleiben würde. Wie es sich damit verhält, kann nur die genauere Betrachtung der Reihen offenbaren, wodurch sich die Werthe dieser arithmetischen Ausdrücke entwickeln. Es ist genug, eine von ihnen zu betrachten, da beyde in dem bekannten Zusammenhange, $\sin a^1 + \cos a^2 = 1$ stehn.

Wir nehmen also die Reihe

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^4}{1.2.3.4} \ldots (-1).^n \frac{a^{2n}}{1.2..2n} + \ldots$$

um zu untersuchen, was für Werthe cos a allmälig erhalten wird, wenn man für a successiv andre und andre Zahlen substituirt.

Es ist schon oben bemerkt, daß diese Reihe für jeden Werth von a convergirt, mithin unbedingt angewendet werden kann. Solange a ein echter Bruch ist, convergirt die Reihe sehr stark, indem alsdann die folgenden Glieder sehr bald einen als Grenze der Näherungsrechnung angenommenen Rang erreichen. Cos a wird alsdann immer selbst ein echter Bruch, aber, was wohl bemerkt zu werden verdient, desto kleiner, je mehr sich a der Einheit nähert. Geht man mit den Werthen von a über die Einheit hinaus, so vermindert sich freylich die

Schnelligkeit der Convergenz, indessen werden noch immer, wegen des sehr geschwinden Anwachsens der Divisoren, worin eigentlich die Coefficienten bestehn, besonders solange man mit den Werthen von a zwischen 1 und 2 bleibt, einige von den ersten Gliedern der Reihe zur Berechnung von cos a hinreichen. Man wird auch sehn, daß die Werthe von cos a fortfahren, immer kleinere positive Brüche zu seyn, wenn a wachsend über die Einheit hinausrückt, man wird sie, wenn a etwa in der Mitte zwischen 1 und 2 fällt, von immer beträchtlicherer Kleinheit erhalten; man wird sie, sobald a sich dem Werthe 2 mehr nähert, negativ, und allmälig wieder größer werdend finden. Dadurch entsteht also ganz natürlich die Frage; gibt es nicht einen Werth von a, für welchen Cos a = 0 werden muß? Man könnte ihn, da man schon weiß, daß er zwischen 1 und 2 liegen muß, durch Versuche finden wollen; indessen würde ein solches Verfahren weder wissenschaftlich noch bequem seyn. Der directe Weg besteht darin, daß man die Gleichung zwischen Zahl und Cosinus umkehrt, so daß sie es möglich macht, aus jedem Werthe, den der Cosinus haben soll, den zugehörigen der Zahl abzuleiten. Es ist leicht, eine solche Umkehrung durch unsre Grundformeln zu erreichen.

Da $e^{+a\sqrt{-1}} = \cos a + \sin a . \sqrt{-1}$

so ist $a = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log (\cos a + \sin a . \sqrt{-1})$

oder da $e^{-a\sqrt{-1}} = \cos a - \sin a \sqrt{-1}$

so wird $a = -\frac{1}{\sqrt{-1}} \log (\cos a - \sin a . \sqrt{-1})$

Zieht man aus beyden Werthen von a das Mittel, so ergibt $a = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log(\cos a + \sin a \sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}$ $\log(\cos a - \sin a \sqrt{-1})$ oder kürzer

$$a = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \left(\frac{1 + \frac{\sin a}{\cos a}\sqrt{-1}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a}\sqrt{-1}} \right)$$

Zur unmittelbaren Berechnung ist freylich diese Formel, weil sie unmögliche Ausdrücke enthält, nicht geschickt, diese verschwinden aber, wenn man ihren Werth nach den Methoden des vorigen Capitels in eine Reihe entwickelt. So entsteht

$$a = \frac{\sin a}{\cos a} - \tfrac{1}{3}\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)^5 \ldots \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)^{2n+1} \ldots$$

Diese Reihe enthält zwar nicht bloß cos a, sondern auch sin a, indessen ist durch cos a zugleich sin a gegeben, da $\sin a = \sqrt{(1 - \cos a^2)}$. Sie ließe sich also in eine völlig regelmäßige, bloß nach Potenzen von cos a fortschreitende, umsetzen. Indessen ist diese Arbeit zu unserer particulären Absicht unnöthig, ja sie würde die Erreichung derselben nur erschweren. Convergent ist die Reihe in ihrer jetzigen Gestalt, sobald sin a kleiner seyn soll als cos a, denn alsdann wird die Größe, nach deren Potenzen sie eigentlich fortschreitet, $\frac{\sin a}{\cos a}$ ein echter Bruch.

Aber unmittelbar zu unsern Zwecken scheint diese Reihe doch nicht gebraucht werden zu können. Wir wollen für $\cos a = 0$, wo also $\sin a = 1$, den Werth von a wissen. Alsdann aber wird die Hauptgröße der Reihe $\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{1}{0}$, hört also auf, eine Zahl zu seyn, und gestattet keine Berechnung mehr. Es wird in der That ein kleiner Kunstgriff erfodert, um dennoch das Gesuchte zu erhalten. Heiße der Werth von a, für welchen $\cos a = 0$, und also $\sin a = 1$ wird, p, so wird für einen andern, der nur $\frac{1}{3}$ von ihm beträgt, der Quotient $\frac{\sin \frac{1}{3} p}{\cos \frac{1}{3} p}$ vermöge der Formel 5) $\cos p = (\cos \frac{1}{3} p)^3 - 3 (\sin \frac{1}{3} p)^2 . (\cos \frac{1}{3} p)$ sogleich gefunden werden können. Denn da hier $\cos p = 0$ seyn soll, so erhält man $(\cos \frac{1}{3} p)^3 - 3 . (\sin \frac{1}{3} p)^2 . (\cos \frac{1}{3} p) = 0$. Und aus dieser Gleichung ergibt sich $\frac{\sin \frac{1}{3} p}{\cos \frac{1}{3} p} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Man setze also in der allgemeinen Reihe, welche a, nach Potenzen der Größe $\frac{\sin a}{\cos a}$ fortschreitend, gibt, für $\frac{\sin a}{\cos a}$ den Werth $\frac{1}{\sqrt{3}}$; was sie alsdann hervorbringt, wird $\frac{1}{3}$ p seyn, und man braucht diese Größe nur mit 3 zu multipliciren, um das gesuchte p, d. h. diejenige Zahl, zu erhalten, deren Sinus 1, Cosinus 0 seyn wird. Es ist also

$$p = \sqrt{3} \left[1 - \frac{1}{3.3^1} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} \ldots (-1)^n \frac{1}{(2n+1)3^n} \ldots \right]$$

Man bekommt, durch Hülfe dieser Reihe, eine sehr schnelle Näherung. Sie gibt eine zwischen 1 und 2 fallende Zahl. Aus Gründen, die nicht hieher gehören, hat man in der Analysis nicht für diese Zahl selbst, sondern für das Doppelte von ihr $= 3.141592653589..$ ein eigenes Zeichen, π, eingeführt, so daß wir also durch $\frac{1}{2}\pi$ die bestimmte Zahl andeuten müssen, wofür $\text{Sin}\,\frac{1}{2}\pi = 1$, und $\text{Cos}\,\frac{1}{2}\pi = 0$ wird. Man hat sie auf sehr viele Decimalstellen berechnet, es ist aber für uns nicht nöthig, sie genauer zu kennen.

Sobald aber der eben bewiesene Satz seine Richtigkeit hat, daß es eine bestimmte Zahl, $\frac{1}{2}\pi$, gibt, für welche zuerst $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$, mithin $\sin\frac{1}{2}\pi = 1$ wird, während für kleinere Zahlen als $\frac{1}{2}\pi$ beyde Ausdrücke reelle Werthe erhielten, ist es leicht, die Sinus und Cosinus größerer Zahlen als $\frac{1}{2}\pi$ auf die, welche den kleineren, zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ enthaltenen, angehören, zurückzuführen.

Zuerst kann jezt sogleich dargethan werden, daß für jede Zahl, welche ein Vielfaches von $\frac{1}{2}\pi$ ist, Sinus und Cosinus nie etwas andres, als $+1$ oder -1, und 0, seyn können. Der Beweis dieses Satzes beginnt damit, zu zeigen, daß $\sin\pi = 0$ und $\cos\pi = -1$ sey. Nach der ersten Formel für die Sinus und Cosinus zusammengesetzter Zahlen ist

$\sin(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi) = 2\,\sin\frac{1}{2}\pi . \cos\frac{1}{2}\pi$ mithin $= 0 = \sin\pi$

$\cos(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi) = (\cos\frac{1}{2}\pi)^2 - (\sin\frac{1}{2}\pi)^2$, mithin $= -1 = \cos\pi$

Daraus ergibt sich sogleich der allgemeinere: wenn 2 Zahlen zusammen π ausmachen, so haben sie

Sinus, die der Größe und dem Zeichen nach identisch sind, und Cosinus, die zwar gleiche Größe, aber entgegengesetzte Zeichen besitzen. Denn es ist nach eben der Formel

$$\sin(\pi - \varphi) = \sin\pi \cos\varphi - \cos\pi \,.\, \sin\varphi = + \sin\varphi$$

$$\cos(\pi - \varphi) = \cos\pi \,.\, \cos\varphi + \sin\pi \sin\varphi = - \cos\varphi$$

Aus dem letzten Satze aber ist wieder eine unmittelbare Folge, daß Zahlen die zusammen ein Vielfaches von π ausmachen, alle den nemlichen Sinus, auch in Absicht auf die Zeichen besitzen, während sie zwar der Größe nach auch denselben Cosinus haben, aber nur dann mit gleichen Zeichen, wenn sie ein gerades Vielfaches von π ausmachen, mit entgegengesetzten hingegen, wenn dieses Vielfache von π ungerade seyn sollte.

Eben so, wenn zwey Zahlen um π von einander verschieden sind, so haben sie der Größe nach gleiche, dem Zeichen nach verschiedene Sinus und Cosinus. Denn es ist

$$\sin(\pi + \varphi) = \sin\pi \cos\varphi + \cos\pi \sin\varphi = - \sin\varphi$$

$$\cos(\pi + \varphi) = \cos\pi \cos\varphi - \sin\pi \sin\varphi = - \cos\varphi$$

Zahlen also, welche um ein ungerades Vielfaches von π verschieden sind, haben der Größe nach gleiche, dem Zeichen nach entgegengesetzte, Sinus und Cosinus; Zahlen, welche sich um ein gerades Vielfaches von π unterscheiden, der Größe und dem Zeichen nach völlig identische.

Wir wollen also nun annehmen, daß unter φ jede beliebige Zahl zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ verstanden werden soll, und daß ihr Sinus und Cosinus als bekannt

betrachtet werden darf, um beym Fortschreiten zu größeren Zahlen uns zu überzeugen, daß Alles auf jene kleineren zurückgeführt werden kann.

Wir kommen, über $\frac{1}{2}\pi$ hinausgehend, zuerst an die Zahlen, welche zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π liegen. Sie können auf die Form $\pi - \varphi$ zurückgebracht werden, es ist aber bekanntlich $\sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi$ und $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$.

Alsdann gelangen wir zu den Zahlen zwischen π und $\frac{3}{2}\pi$. Sie sind von der Form $(\pi + \varphi)$. Es ist also für sie $\sin(\pi + \varphi) = -\sin\varphi$ und $\cos(\pi + \varphi) = -\cos\varphi$.

Endlich kommen wir zu den Zahlen zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und 2π. Sie kommen auf den Ausdruck $2\pi - \varphi$ zurück. Dem gemäß ist, in Beziehung auf sie, $\sin(2\pi - \varphi) = -\sin\varphi$, und $\cos(2\pi - \varphi) = \cos\varphi$.

Allgemein: wenn eine Zahl größer als ist 2π, so mag sie zwischen $n.2\pi$ und $(n+1).2\pi$ liegen. Sie kann dabey wenn wir durch Unterschiede, die weniger als $\frac{1}{2}\pi$ betragen, fortschreiten wollen, entweder von der Form $n.2\pi + \varphi$ seyn, und dann ist $\sin(n.2\pi + \varphi) = \sin\varphi$; $\cos(n.2\pi + \varphi) = \cos\varphi$.

Oder sie kann die Form $(2n+1)\pi - \varphi$ besitzen, und alsdann $\sin[(2n+1)\pi - \varphi] = \sin\varphi$; $\cos[(2n+1)\pi - \varphi] = -\cos\varphi$.

Oder sie kann unter die Form $(2n+1)\pi + \varphi$ gehören. In diesem Falle ist $\sin[(2n+1)\pi + \varphi] = -\sin\varphi$; $\cos[(2n+1)\pi + \varphi] = -\cos\varphi$. Oder

endlich sie kann die Form $(n+1)2\pi-\varphi$ haben. Und so muß $\sin[(n+1)2\pi-\varphi]=-\sin\varphi$; $\cos[(n+1)2\pi-\varphi]=\cos\varphi$ seyn. Auf jeden Fall also hat man, ohne alle weitere Rechnung, Sinus und Cosinus der Zahl, wenn nur eben diese Dinge für den überschießenden oder fehlenden Theil φ, welcher an sich kleiner als $\frac{1}{2}\pi$, die Zahl zu einem Vielfachen von π ergänzt, als bekannt angenommen werden darf.

Als eine Folgerung aus dieser Betrachtung dient die Bemerkung, daß es unzählig viele positive Zahlen gibt, welche denselben Sinus oder Cosinus haben. Ist φ die kleinste, so werden alle von der Form $2n\pi+\varphi$, oder von der Form $(2n+1)\pi-\varphi$, denselben Sinus; alle von der Form $2n\pi+\varphi$ oder von der $2(n+1)\pi-\varphi$ denselben Cosinus besitzen, welcher Werth auch für n angenommen werden möge. Alle Zahlen hingegen, welche der Größe nach denselben Sinus wie φ, dem Zeichen nach aber den entgegensetzten besitzen, werden von der Form $(2n+1)\pi+\varphi$ oder $2(n+1)\pi-\varphi$; alle bey deren Cosinus dasselbe der Fall ist, von der Form $(2n+1)\pi-\varphi$ oder $2(n+1)\pi-\varphi$ seyn. Wollte man also alle Zahlen haben, welche zugleich den nemlichen Sinus und Cosinus besitzen, so würden sie, φ als die kleinste unter ihnen gedacht, unter dem Ausdruck $(2n\pi+\varphi)$ enthalten seyn; wo wiederum n jede beliebige Zahl seyn kann. Wollte man namentlich alle Zahlen, deren Sinus $+1$, deren Cosinus folglich $=0$, so würde die kleinste,

unter ihnen, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, mithin $2n\pi + \frac{1}{2}\pi$ und außerdem noch $(2n+1)\pi - \frac{1}{2}\pi$ ihr allgemeiner Ausdruck. Beyde ziehn sich auf $(2n+\frac{1}{2})\pi$ zusammen. Verlangte man alle Zahlen, deren Cosinus $+1$, so würden sie, da die kleinste von ihnen $= 0$, unter den beyden Formen $2n\pi$ und $2(n+1)\pi$, die sich auf $2n\pi$ zusammenziehn, enthalten seyn. Sollten endlich alle, deren Cosinus $= -1$ ist, angegeben werden, so hätte man, da die kleinste unter ihnen $= \pi$ ist, für sie die beyden Formen $2n\pi + \pi$ und $2(n+1)\pi - \pi$, d.h. die Form $(2n+1)\pi$.

Wir haben bey dieser ganzen Betrachtung nur positive Zahlen in Rücksicht genommen. In der That ist dies auch vollkommen hinlänglich, denn nach der gleich zu Anfang gemachten Bemerkung daß $\sin(-a) = -\sin a$, und $\cos(-a) = \cos(+a)$ kann alles was sie betrifft sogleich auf das Vorige zurückgeführt werden, insofern es die Absicht ist, für negative Zahlen die Sinus und Cosinus zu erhalten. Aber, wenn es darauf ankommt, alle Zahlen anzugeben, welche den nemlichen Sinus oder Cosinus haben, so muß allerdings, um ihren allgemeinen Ausdruck nicht zu verfehlen, auch noch darauf Rücksicht genommen werden. Und alsdann werden, den vorigen Formeln gemäß, $\sin[-(2n+1)\pi - \varphi]$ und $\sin[-2(n+1)\pi + \varphi]$ beyde denselben Sinus haben als φ, so wie $\cos(-2n\pi - \varphi)$ und $\cos[-2(n+1)\pi + \varphi]$ beyde $= \cos\varphi$ seyn werden. Und so sind alle Zahlen, die denselben Sinus besitzen, wenn man in völliger Allgemeinheit

sowohl positive als negative zusammenfassen will, unter die Formen $\pm 2n\pi + \varphi$, und $\pm(2n+1)\pi - \varphi$; alle Zahlen, welche denselben Cosinus haben, unter die Fomen $\pm(2n\pi + \varphi)$ und $\pm(2n\pi - \varphi)$ enthalten. Alle Zahlen also, welche nicht allein gleichen Sinus, sondern auch gleichen Cosinus besitzen sollen, gehören der Form $\pm 2n\pi + \varphi$ an. Alle Zahlen deren Cosinus $+1$ seyn soll, fallen unter die Form $\pm 2n\pi$; alle deren Cosinus $= -1$ seyn soll, unter die Form $\pm(2n+1)\pi$.

Nach diesen Betrachtungen dürfen wir behaupten, daß eine Tabelle, worin die berechneten Werthe der Sinus und Cosinus für alle Zahlen zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ anzutreffen sind, vollkommen hinlänglich seyn werde, um für jede beliebig angenommene Zahl, sie sey positiv oder negativ, ohne alle weitere Rechnung, den Sinus und Cosinus zu erhalten. Freylich gibt es solcher Zahlen unendlich viele, indessen wird es für allen Gebrauch hinlänglich seyn, wenn nur alle diejenigen, die sich um eine beliebig klein gewählte Größe von einander unterscheiben, zur Berechnung gezogen werden. Wir besitzen in der That eine solche Tabelle, genau berechnet, und gehörig angeordnet, in großer Vollständigkeit, nur daß der geometrische Zweck, um dessentwillen sie verfertigt worden ist, ihr eine Einrichtung gegeben hat, welche in gewissen Fällen einige kleine Modificationen erfodert, um sie für den gegenwärtigen analytischen brauchbar zu machen.

Es darf wohl als bekannt aus den Anfangsgründen der Trigonometrie angenommen werden, was für eine geometrische Bedeutung die Worte Sinus und Cosinus eines Winkels, oder des ihm zugehörigen Kreisbogens besitzen. Nun zeigt es sich bey den Untersuchungen über die Rectification des Kreises, daß, wenn man den Radius zur Einheit nimmt, und die Länge eines beliebigen Kreisbogens a nennt, die Gleichung zwischen dem Kreisbogen und seiner Sinuslinie $\sin a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$; zwischen ihm und seiner Cosinuslinie $\cos a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2}$ ist. Zufällig also sind es gerade dieselben arithmetischen Formeln, auf welche wir vorhin bey der Betrachtung der Exponenzialgrößen mit unmöglichen Exponenten gerathen sind, die für die wesentlichsten Bedürfnisse der Trigonometrie berechnet werden mußten. Die Analysis kann sich dieses vortheilhaften Umstandes bedienen; sie mag allenfalls, um keine überflüssige Terminologie zu stiften, den Namen Sinus und Cosinus eine reine arithmetische Bedeutung unterlegen, welcher gemäß sie nichts anders als Zahl-Ausdrücke von bestimmter Gestalt bedeuten; sie mag jene würklich aus diesen Zahl-Ausdrücken berechneten Tabellen gebrauchen, wie sie sich der logarithmischen bedient. Sie bekommt dadurch offenbar nichts mit der Geometrie und Trigonometrie zu thun, und ihre Reinheit leidet nicht durch Einmischung einer reellen Größenwissenschaft,

welche in der That nie gestattet werden darf, wenn man nicht alle Ordnung der Begriffe verwirren, und die Folge zum Grunde machen will.

Es ist in unsern trigonometrischen Tafeln nur der eine Umstand für ihren arithmetischen Gebrauch wohl zu bemerken, daß nicht der Kreisbogen selbst, der Länge nach durch den Radius als Einheit ausgedrückt, sondern statt dessen die Menge von Graden, Minuten und Secunden, welche er enthält, neben dem zugehörigen Sinus oder Cosinus stehn. Man muß also, wenn man zu einer beliebigen Zahl a, in analytischer Bedeutung, durch Hülfe der Tafeln, den Sinus oder Cosinus haben will, erst berechnen, wieviel Grade u. s. w. ein Kreisbogen, dessen Länge, für den Radius $1 = a$ seyn soll, enthalten wird; welches vermöge der bekannten Regel durch die Formel $\frac{a}{\pi} \cdot 360^\circ$ sogleich geschehn kann. Zu der dadurch gefundenen Zahl von Graden nehme man aus den Tafeln den Sinus oder den Cosinus, so hat man Sin a oder Cos a. Eben so, wenn umgekehrt zu einem bekannten Sinus oder Cosinus die zugehörige Zahl gesucht würde. Die Tafeln geben nur Grade u. s. w. für sie; man muß die Länge eines Kreisbogens alsdann noch berechnen, welcher, für den Radius 1, diese gefundenen Grade u. s. w. enthielte, und sie ist eigentlich die gesuchte Zahl. Fast in allen trigonometrischen Tafeln sind eigene Hülfstabellen vorhanden, um diese kleinen Rechnungen noch besonders zu erleichtern.

Vermöge aller, in diesem Kapitel angestellten Untersuchungen, sind wir also im Stande, für jede Exponenzialgröße von der Form $e^{a\sqrt{-1}}$ den berechneten Werth eben so gut anzugeben, wie wir es für die von der Form e^a vermögen. Es ist $e^{a\sqrt{-1}} = \text{Cos}\, a + \text{Sin}\, a . \sqrt{-1}$. Wir haben also aus den trigonometrischen Tafeln für die Zahl a ihren Sinus und ihren Cosinus aufzusuchen, und erhalten alsdann den Werth des angenommenen Ausdrucks ohne alle weitere Rechnung.

Als ein vorzüglich merkwürdiger Umstand verdient in Beziehung auf solche Exponenzialgrößen besonders das angeführt zu werden, daß nicht von jeder unter ihnen der Werth selbst wieder ein unmöglicher Ausdruck ist. Im Allgemeinen wird immer $e^{a\sqrt{-1}} = \text{Cos}\, a + \text{Sin}\, a \sqrt{-1}$ seyn. Nun aber gibt es Werthe von a, für welche $\text{Sin}\, a = 0$ wird. Zuerst alle von der Form $\pm 2n\pi$. Sie geben $\text{Sin}\, a = 0$, $\text{Cos}\, a = 1$, verwandeln mithin $e^{a\sqrt{-1}}$ in $1 + 0\sqrt{-1} = 1$. Alsdann alle von der Form $\pm(2n+1)\pi$. Für sie wird $\sin a = 0$, $\cos = -1$; sie machen also $e^{a\sqrt{-1}} = -1 + 0\sqrt{-1}$. Mithin erhält in zwey Fällen, aber auch nur in diesen, eine Exponenzialgröße mit unmöglichen Exponenten dennoch einen möglichen Werth. Der erste ist $e^{\pm 2n\pi\sqrt{-1}} = +1$, der andre $e^{\pm(2n+1)\pi\sqrt{-1}} = -1$. Aus diesen Sätzen geht ein für die Theorie der Logarithmen sehr wichtiges Resultat hervor, welches zunächst nur in Absicht auf die natürlichen Logarithmen dargestellt werden mag, mit einer kleinen Modification aber auf jedes andre System eben

so gut bezogen werden kann. Jede positive Zahl hat unendlich viele Logarithmen, von denen aber nur einer möglich ist, die andern sämtlich durch unmögliche Ausdrücke gegeben werden. Wir nennen Logarithme einer Zahl das, was als Exponent einer Potenz von e angenommen, wenn der Werth dieser Potenz durch Hülfe der Exponenzialreihe berechnet wird, zum Resultat jene gegebene Zahl hervorbringt. Ist also e^a, wenn der Werth dieser Größe durch die Reihe $1 + a + \frac{a^2}{1.2} + ..$ berechnet wird, $= A$, so nennen wir a den natürlichen Logarithmen der Zahl A. Können noch andre Exponenten, wie b, gefunden werden, so daß der auf gleiche Weise berechnete Werth von e^b gleichfalls $= A$ wird, so hat die Zahl A mehr als einen Logarithmen. Nun ist es wohl von selbst klar, daß, wenn der Logarithme eine mögliche bestimmte Zahl seyn soll, für jede Zahl nur einer gefunden werden kann. Gestatten wir uns aber auch unmögliche Ausdrücke hypothetisch zu gebrauchen, so findet gerade das Gegentheil statt. Es ist eben bewiesen, daß $e^{\pm 2n\pi\sqrt{-1}} = 1$ sey. Es wird also, wenn $e^a = A$ war, auch $e^a . e^{\pm 2n1\pi\sqrt{-}} = A$ seyn. Man erhält mithin $e^{a \pm 2n\pi\sqrt{-1}} = A$, d. h. der Logarithme der Zahl A ist $a \pm 2n\pi\sqrt{-1}$, wo es erlaubt ist, für n jede beliebige ganze Zahl an die Stelle zu setzen. So hat jede positive Zahl unendlich viele unmögliche Ausdrücke zu Logarithmen, neben einem einzigen möglichen.

Und nun kann auch über die berühmte Frage wegen der Logarithmen negativer Zahlen eine vollständige Entscheidung gegeben werden. Der bekannten, eben ausgesprochenen, Erklärung von Logarithmen gemäß, ist es klar, daß die Reihe $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.2.3}$..., wenigstens für jeden positiven Werth von a, wenn man sie zur nähernden Berechnung anwendet, nur positive Resultate geben kann; und da $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ so erhellet ebendasselbe auch für jeden negativen Werth von a. Mithin gehört, im natürlichen Logarithmen-System jedem möglichen Logarithmen, er sey übrigens beschaffen wie er wolle, eine positive Zahl zu. Folglich haben in diesem System nur positive Zahlen Logarithmen, wenn man verlangt daß die lezteren möglich seyn sollen. Will man aber dennoch eine negative Zahl nehmen, um sie als Exponenzialgröße, d. h. als Resultat der Reihe $1 + a + \frac{a^2}{1.2} + ..$ zu betrachten, und frägt man, wie a angenommen werden müsse, damit die Summe der Reihe etwas Negatives werde, so ist sehr natürlich, daß alsdann für a kein andrer Ausdruck als ein unmöglicher gegeben werden kann. Dazu ist nun schon alles durch die vorhergehende Untersuchung vollkommen eingeleitet. Jede negative Zahl kann als das Product aus einer gleichgroßen positiven und dem Factor (−1) angesehn werden. Mithin ist ihr Logarithme die Summe von den Logarithmen dieser beyden Factoren. Nun aber war $e^{\pm(2n\pm1)\pi\sqrt{-1}} = -1$

d. h. $\text{Log}(-1) = \pm(2n+1)\pi.\sqrt{-1}$. Man erhält also $\log(-a) = \log a \pm (2n+1)\pi\sqrt{-1}$. Und so können aus den gewöhnlichen Tafeln, welche nur positive Zahlen enthalten, auch die Logarithmen der negativen genommen werden. Es gibt deren gleichfalls unendlich viele, aber sie sind sämtlich unmöglich. Dies hindert aber ihre Einführung in die Rechnung keinesweges, und es ist eine völlig unrichtige Regel, wenn man gewöhnlich sagt: die Logarithmen-Rechnung könne entweder bey negativen Zahlen gar nicht gebraucht, oder es müsse von den Zeichen der gegebenen Zahlen abstrahirt werden. Man gebe nur den Logarithmen negativer Zahlen die eben abgeleitete Gestalt, und man wird alle Resultate der Rechnung vollkommen richtig erhalten. Soll z. E. ein Product aus zwey negativen Zahlen $(-a).(-b)$ berechnet werden, und will man es durch Logarithmen, so wird

$\log(-a) + \log(-b) = \log[(-a).(-b)]$. Nun ist

$$\log(-a) = \log a \pm (2n+1)\pi\sqrt{-1}$$
$$\log(-b) = \log b \pm (2m+1)\pi\sqrt{-1}$$

$$\log[(-a).(-b)] = \log a - \log b \pm [2(m+n)+2]\pi\sqrt{-1}$$

Aber der Ausdruck $2(m+n)+2$ ist, wenn n und m jede beliebige ganze Zahl bedeutet, das Schema jeder geraden Zahl, und darf kürzer durch $2n$ angegeben werden, so daß also

$$\log[(-a).(-b)] = \log a + \log b \pm 2n\pi\sqrt{-1} = \log(ab)$$

Auf ähnliche Weise, wie in diesem Falle, wird man

allenthalben, wo negative Zahlen vorkommen, sich ohne Schwierigkeit verhalten können.

Da zum Behuf würklicher Rechnungen in der theoretischen Analysis kein andres Potenzensystem, als das natürliche gebraucht wird, so ist es hinlänglich, die Regeln für die Entwicklung der Exponenzialgrößen mit unmöglichen Exponenten in Beziehung auf dieses System zu kennen. Für Systeme von einer andern Basis würde man ähnliche, nur zusammengesetztere Resultate erhalten, die in gewissen Fällen paradox erscheinen, und ohne große Vorsicht leicht zu Widersprüchen führen könnten.

Dreyzehntes Kapitel.

Logarithmen unmöglicher Ausdrücke. Darauf gegründeter Algorithmus mit solchen Ausdrücken.

Wir haben im vorigen Kapitel gesehn, daß eine Exponenzialgröße, deren Exponent ein unmöglicher Ausdruck der einfachsten Art ist, wir $e^{b\sqrt{-1}}$, allemal auf die Gestalt $\cos a + \sin b . \sqrt{-1}$ zurückkomme, sobald man ihre würkliche Entwicklung gehörig unternimt. Wir dürfen daher, etwas allgemeiner, behaupten, daß jede Exponenzialgröße von der Form $e^{a+b\sqrt{-1}}$, sich auf einen Werth von der Gestalt $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ bringen lasse, wo unter α und β mögliche bestimmte Zahlen, von a und b abhängig, ver-

standen werden dürfen. Denn $e^{a+b\sqrt{-1}}$ kann als ein Product, $e^a . e^{b\sqrt{-1}}$ angesehn werden. Nun geben die logarithmischen Tafeln sogleich für e^a eine bestimmte Zahl, $= A$; die trigonometrischen für $e^{b\sqrt{-1}}$ den gleichgeltenden Ausdruck $\cos b + \sin b\sqrt{-1}$, So wird also, $e^{a+b\sqrt{-1}} = A\cos b + A\sin b\sqrt{-1}$ wo offenbar die beyden Größen $A\cos b$, und $A\sin b$ als mögliche bestimmte Zahlen erscheinen.

Es sey also nun umgekehrt ein unmöglicher Ausdruck von der nemlichen Gestalt $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ gegeben. Es wird gefragt, ob er nicht als eine Exponenzialgröße aus dem natürlichen System betrachtet werden darf, und ob nicht der ihm insofern zugehörige Exponent in gleicher Gestalt gefunden werden kann. Nehmen wir also an, daß $e^{a+b\sqrt{-1}} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, um zu sehn, ob jedesmal die fingirten Größen a und b sich so bestimmen lassen, daß dieser Foderung Genüge geleistet wird. Wir haben eben gesehn, daß $e^{a+b\sqrt{-1}} = e^a . \cos b + e^a . \sin b . \sqrt{-1}$. Soll also unsre Voraussetzung bestehn, so muß $e^a . \cos b = \alpha$, und $e^a \sin b = \beta$ seyn. Nennen wir zur Abkürzung, wie vorhin, $e^a = A$. Offenbar sind hier zwey Gleichungen vorhanden, in denen zwey unbekannte Größen, A und b vorkommen, aus deren gehöriger Verbindung mithin jede dieser Größen sich muß bestimmen lassen.

Diese Verbindung gelingt am leichtesten, wenn man in beyden Gleichungen alles zum Quadrat erhebt.

und in der lezten für $\sin b^2$ seinen bekannten Werth $1 - \cos b^2$ sezt.

$$A^2 . \cos b^2 = \alpha^2$$
$$A^2 - A^2 \cos b^2 = \beta^2$$

Mithin addirt $A^2 = \alpha^2 + \beta^2$

Folglich $A = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$

Und nun erhält man sogleich $\cos b = \frac{\alpha}{A} = \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}$

$\sin b = \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$. So ist es also leicht, aus den gegebenen Zahlen α und β einen von diesen beyden Brüchen zu berechnen, und alsdann aus den trigonometrischen Tafeln durch bloßes Nachsehn in denselben den Bogen b zu finden, welchem er angehört. Es wird einerley seyn, ob man diesen Bogen aus dem bekannten Werthe seines Sinus, $\sin b = \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha+\beta^2)}}$ oder ob man ihn aus dem seines Cosinus $\cos b = \frac{\alpha}{\sqrt{(a^2+\beta^2)}}$ finden will. In der That kann die eine Gleichung als eine Folgerung aus der andern angesehn werden. Denn wenn man vermöge der bekannten Formel $\cos b = \sqrt{(1 - \sin b^2)}$] aus $\sin b$ berechnen wollte, was $\cos b$ seyn müßte, so würde man unsern Werth $\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$ finden. Nur wäre alsdann, weil diese Größe durch Ausziehung der Quadratwurzel gefunden wäre, eine Zweydeutigkeit vorhanden, und man würde nicht wissen, ob man $\frac{+\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$, oder $\frac{-\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2}}$

zu nehmen hätte. Diese Zweydeutigkeit wird bey unsrer unmittelbaren Ableitung des Werths von $\sin b$ sowohl als von $\cos b$ aus der Aufgabe selbst, entschieden.

Man vergesse aber nicht, wenn man aus den trigonometrischen Tafeln die Zahl nimt, welche dem Sinus $\frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$, oder dem Cosinus $\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$ angehört, daß sie eigentlich nur die kleinste positive Zahl unter unendlich vielen ist, welche eben derselben Bedingung entsprechen. Heißt die Zahl, welche in den Tafeln neben dem genannten Sinus und Cosinus, als ihm angehörig steht, b, so ist es eigentlich die Zahl $\pm 2n\pi + b$, wo n alle ganze Zahlen nach Belieben bedeuten mag, welche man zu setzen hat. Denn es ist im vorigen Kapitel bewiesen worden, daß alle Zahlen, die mit b zugleich denselben Sinus und Cosinus besitzen, unter die Form $\pm 2n\pi + b$ zurückgebracht werden können.

Und so läßt sich in der That, wenn die Größe $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ gegeben seyn sollte, der Exponent einer Potenz im natürlichen System finden, deren berechneter Werth dieser Größe gleichkommen muß. Es sey $e^a = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$, d. h. es sey a der natürliche Logarithme von $\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$ Es sey ferner b die aus den Tafeln genommene Zahl, welcher als Cosinus $\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$, als Sinus $\frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$ zugehört. Alsdann wird $\alpha + \beta\sqrt{-1} = e^{a + (b \pm 2n\pi)\sqrt{-1}}$, oder mit andern Worten, es wird $\log(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = a + (b \pm 2n\pi)\sqrt{-1}$ seyn.

Dieses Verfahren aber ist noch mehrerer Abkürzungen fähig. Wir besitzen in unsern trigonometrischen Tafeln außer den beyden Columnen, welche für jede beliebige Zahl, innerhalb der gehörigen Grenzen, Sinus und Cosinus darbieten, noch eine dritte, worin der Werth des Quotienten $\frac{\sin}{\cos}$, für eben diese Zahl anzutreffen ist, und man nennt jenen Quotienten selbst die Tangente der Zahl, $\frac{\sin b}{\cos b} = \tang b$. Durch Hülfe dieser Columne finden wir die Zahl, welche wir zum Behuf der vorliegenden Untersuchung zuerst bestimmen müssen, leichter, als auf dem ursprünglichen, eben angegebenen Wege. Da $\sin b = \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$; $\cos b = \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$ so wird $\frac{\sin b}{\cos b} = \tang b = \frac{\beta}{\alpha}$ seyn. Es ist aber offenbar bequemer, $\frac{\beta}{\alpha}$, als $\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$ oder $\frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$ zu berechnen. Selbst die Bestimmung der Größe $A = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$ läßt sich auf diesem Wege erleichtern. Es war $\cos b = \frac{\alpha}{A}$; es wird mithin $A = \frac{\alpha}{\cos b}$ seyn, und auf diese Weise die Berechnung von $\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$ vermieden werden können.

Jezt also läßt sich unsre Regel, um für einen Ausdruck wie $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ den natürlichen Logarithmen zu finden, folgendermaßen aussprechen. Man

berechne zuerst den Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$, sehe ihn als Tangente einer Zahl an, und suche diese Zahl, b, aus den trigonometrischen Tafeln, nehme aber zugleich aus eben denselben, zu gleich nachfolgendem Gebrauch, den Cosinus dieser Zahl, cos b, heraus. Man berechne ferner den Werth des Quotienten $\frac{\alpha}{\cos b}$, welcher a heissen mag. Alsdann ist wie vorhin $\log (\alpha + \beta \sqrt{-1}) = a + (b \pm 2 n \pi) \sqrt{-1}$

Da unsre gemeinen trigonometrischen Tafeln nicht bloß die Sinus, Cosinus, Tangenten, sondern auch die briggischen Logarithmen dieser Zahlen enthalten, so gewähren sie selbst bey der lezten Berechnung noch eine merkliche Abkürzung. Man nehme log vulg β – log vulg α, und suche es unter der Columne log tang, so findet man b; man nehme log vulg α – log vulg cos b, so hat man log vulg a, und daraus, wenn es nöthig ist, a selbst.

Uebrigens braucht wohl nicht erinnert zu werden, daß die eben abgeleitete Formel im Wesentlichen völlig ungeändert bleibt, wenn die Radicalgröße mit dem umgekehrten Zeichen angesetzt werden sollte, und daß nur auf der andern Seite, in ihrem entwickelten Werthe, das Gleiche beobachtet werden muß, so daß also $\log (\alpha - \beta \sqrt{-1}) = a - (b \pm 2 n \pi) \sqrt{-1}$ seyn wird.

Der Mechanismus des eigentlichen Rechnens mit solchen unmöglichen Formen wird dann am bequemsten,

wenn man diese Formen selbst behält, und unmittelbar mit ihnen rechnet, nachdem man ihren natürlichen Logarithmen gefunden, und sie selbst rückwärts wieder so ausdrückt, wie Exponenzialgrößen, deren Werthe aus ihrem bekannten Exponenten berechnet werden sollen, ausgedrückt werden müssen. Ist, auf die vorhin angegebene Weise $\log(\alpha + \beta)\sqrt{-1} = a + (b \pm 2n\pi)\sqrt{-1}$, so wird $\alpha + \beta\sqrt{-1}$
$= e^{a + (b \pm 2n\pi)\sqrt{-1}} = e^{a} \cdot e^{b \pm 2n\pi\sqrt{-1}}$
$= A[\cos(b + 2n\pi) + [\sin(b + 2n\pi)]\sqrt{-1})$
seyn, wo $A = \frac{\alpha}{\cos b}$. Will man jedesmal, statt der ursprünglich gegebenen unmöglichen Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, den lezten, ihr völlig gleichgeltenden Ausdruck: $\frac{\alpha}{\cos b}$
$[(\cos b + 2n\pi) + [\sin(b + 2n\pi)]\sqrt{-1}$, wo b dadurch gefunden wird, daß man in den Tafeln eine Zahl sucht, deren Tangente $\frac{\beta}{\alpha}$ ist, substituiren, so wird sich ein eigener Algorithmus für das Rechnen mit solchen Formen angeben lassen der freylich an sich nichts anders, als ein verstecktes, aber abgekürztes Rechnen mit Logarithmen ist. Wir wollen es durch die bekannten Hauptregeln der Logarithmen-Rechnung verfolgen, und, der Kürze wegen, für $\frac{\alpha}{\cos b}$ wie bisher A, für $b \pm 2n\pi$ das einfache Zeichen B setzen, so daß $\log(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = (A + B\sqrt{-1})$, mithin der aus diesem Logarithmen rückwärts bestimmte

Werth der Größe $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, welchen wir ins künftige den logarithmisch entwickelten nennen wollen, $A(\cos B + \sin B\sqrt{-1})$

1. Wenn zwey unmögliche Ausdrücke wie $(\alpha + \beta\sqrt{-1})$, $(\gamma + \delta\sqrt{-1})$ mit einander multiplicirt werden sollen, so setze man sie zuerst nur in unentwickelte Exponenzialgrößen um.

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = A e^{B\sqrt{-1}}$$
$$\gamma + \delta\sqrt{-1} = C e^{D\sqrt{-1}}$$

Mithin $(\alpha + \beta\sqrt{-1})(\gamma + \delta\sqrt{-1}) = AC.e^{(D+B)\sqrt{-1}}$
Hätte man für die erste sogleich ihren logarithmisch entwickelten Werth gesetzt, so wäre sie gewesen.

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = A.(\cos B + \sin B.\sqrt{-1})$$

Ebenso die zweyte

$$\gamma + \delta\sqrt{-1} = C.(\cos D + \sin D.\sqrt{-1})$$

Bringt man ihr berechnetes Product auf dieselbe Gestalt, so wird es, $AC.e^{(D+B)\sqrt{-1}}$ $= AC[\cos(D+B) + [\sin(D+B)]\sqrt{-1}]$
Daraus ergibt sich also folgende Regel: das Product logarithmisch entwickelter unmöglicher Ausdrücke bleibt von derselben Gestalt wie sie. Der mögliche Factor des Products entsteht durch Multiplication der möglichen Factoren in den gegebenen Formen, AC; der unmögliche Factor enthält den Cosinus und Sinus einer Zahl, welche die Summe von denjenigen ist, welche in den zur Multiplication gegebenen Ausdrücken vorkamen. Dieser Satz, von einem Producte aus zwey solchen Ausdrücken bewiesen, gilt ohne Frage für jede beliebige Anzahl ähnlicher Factoren.

Unentbehrlich ist die eben gefundene Regel keinesweges. Denn man hätte auch durch gemeine Multiplication das Gesuchte erhalten können. $(\alpha + \beta \sqrt{-1}) \cdot (\gamma + \delta \sqrt{-1}) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma) \sqrt{-1}$. Es würde sogar sehr leicht seyn, eine allgemeine Regel zu finden, nach welcher sich, bey beliebig vielen Factoren dieser Art, die Zusammensetzung des möglichen sowohl als des unmöglichen Theils in ihrem Producte richtet. Indessen, wenn die Zahlen, woraus sich solche Ausdrücke zusammensetzen, von beträchtlicher Größe sind, wird immer der Gebrauch unsrer Regel eine bedeutende Abkürzung gewähren; sind sie klein, so wird es bequemer seyn, sich des ursprünglichen Multiplicirens zu bedienen.

2. Wenn der Quotient von zwey unmöglichen Ausdrücken, wir $\frac{\alpha + \beta \sqrt{-1}}{\gamma + \delta \sqrt{-1}}$ gefunden werden soll, so erhält man, beyde in Exponenzialgrößen umgesetzt, $\frac{A \cdot e^{B\sqrt{-1}}}{C \cdot e^{D\sqrt{-1}}} = \frac{A}{C} \cdot e^{(B-D)\sqrt{-1}}$. Hätte man die erste logarithmisch entwickelt, so wäre ihr Werth $A \cdot (\cos B + \sin B \sqrt{-1})$, ebenso der Werth der zweyten $C \cdot (\cos D + \sin D \sqrt{-1})$ gewesen. Und von ihrem Quotienten ist der logarithmisch entwickelte Werth $\frac{A}{C} \cdot [\cos (B - D) + [\sin (B - D)] \sqrt{-1}]$. Daraus also folgt die Regel: der Quotient logarithmisch entwickelter unmöglicher Formen ist eine ähnliche. Ihr möglicher Factor ist ein Quotient aus denen der

gegebenen, $\frac{A}{C}$. Ihr unmöglicher Factor enthält den Cosinus und Sinus einer Zahl, welche die Differenz derjenigen ist, wovon im Dividend und Divisor Cosinus und Sinus vorkommen.

Auch hier bedürfte es unsrer Regel nicht schlechterdings, um den Quotienten zweyer unmöglichen Ausdrücke in ähnlicher Gestalt wie sie zu erhalten. Man multiplicire in dem Bruche $\frac{\alpha + \beta \sqrt{-1}}{\gamma + \delta \sqrt{-1}}$ Zähler und Nenner mit $\gamma - \delta \sqrt{-1}$, so erhält man $\left(\frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2}\right) + \left(\frac{\gamma\beta - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}\right) \sqrt{-1}$, als den Werth des gegebenen Bruchs oder Quotienten. Hier tritt also die nemliche Bemerkung wie bey der Multiplication ein.

3. Wenn ein unmöglicher Ausdruck, von der Form $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ auf die Potenz eines beliebigen Exponenten erhoben werden soll, wie $(\alpha + \beta \sqrt{-1})^n$; so setze man, wie vorhin, für ihn zuerst eine gleichgeltende unentwickelte Exponenzialgröße an die Stelle, $\alpha + \beta \sqrt{-1} = A e^{B\sqrt{-1}}$. Alsdann erhebe man sie, statt seiner, zu der verlangten Potenz, $(\alpha + \beta \sqrt{-1})^n = A^n . e^{nB\sqrt{-1}}$. Von dieser Exponenzialgröße aber ist der entwickelte Werth $A^n [\cos nB + (\sin nB) . \sqrt{-1}] = (\alpha + \beta \sqrt{-1})^n$. Jede Potenz also von einer logarithmisch entwickelten unmöglichen Größe stellt sich unter gleicher Gestalt dar. Man erhebe den möglichen Factor der gegebenen Größe auf die verlangte

Potenz, so hat man den möglichen Factor; man multiplicire die Zahl, wovon im unmöglichen Factor der gegebenen Größe Cosinus und Sinus vorkommen, mit dem Grade der nemlichen Potenz, so hat man den unmöglichen Factor des gewünschten Resultats.

Diese Regel ist von mehr als einer Seite sehr wichtig. Man könnte zwar $(\alpha + \beta \sqrt{-1})^n$ allerdings vermöge des binomischen Lehrsatzes berechnen. Aber schon wenn n eine positive ganze Zahl von einiger Größe seyn sollte, würde diese Rechnung sehr weitläuftig ausfallen. Wäre n eine negative Zahl oder ein Bruch, so böte der binomische Lehrsatz eine unbestimmt fortlaufende Reihe dar, die nur dann, wenn $\frac{\beta}{\alpha}$ ein echter Bruch ist, zu einer nähernden Berechnung gebraucht werden könnte, und selbst da noch meistens viele Arbeit kosten würde. Durch Hülfe unsrer Formel $[A(\cos B + \sin B . \sqrt{-1})]^n = A^n . (\cos n B + \sin n B . \sqrt{-1})$ werden alle diese Rechnungen mit gleicher Leichtigkeit und Sicherheit vollzogen.

Aber der größte Nutzen unsrer Formel liegt darin, daß sie, bey Wurzelausziehungen, nicht bloß einen von den Werthen angibt, welchen die auszuziehende Wurzel besitzen kann, sondern jeden von ihnen, und zwar alle mit gleicher Leichtigkeit, alle auf die einfachste Grundform unmöglicher Ausdrücke zurückgeführt. Es ist aus dem Vorhergehenden bekannt, daß für jede auszuziehende Wurzel so viele verschiedene Werthe

gefunden werden müssen, als der Grad dieser Wurzel Einheiten in sich schließt. Es muß also, wenn $\sqrt[m]{(\alpha + \beta\sqrt{-1})}$ gefodert wird, dafür eine Anzahl von m verschiedenen ähnlich gebauten Formen angegeben werden können. Der Ausdruck $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, setzt sich, logarithmisch entwickelt, wenn durch Hülfe der Tafeln aus der Gleichung $\frac{\beta}{\alpha} = \text{tang}\, b$, die Zahl b und ihr Cosinus gefunden worden ist, in den gleichgeltenden Ausdruck $\frac{\alpha}{\cos\beta}\,[\cos(b \pm 2n\pi) + [\sin(b \pm 2n\pi)]\sqrt{-1}]$ um. Daraus aber wird die Wurzel des m^{ten} Grades

$$\sqrt[m]{\left(\frac{\alpha}{\cos\beta}\right)} \cdot \left[\cos\left(\frac{b \pm 2n\pi}{m}\right) + \left[\sin\left(\frac{b \pm 2n\pi}{m}\right)\right]\sqrt{-1}\right]$$

Betrachten wir den zweyten unmöglichen Factor in diesem Ausdrucke, so werden wir finden, daß unter der unbestimmten Zahl von Werthen, die er zu enthalten scheint, da es in ihm gestattet ist, für n jede beliebige ganze Zahl zu setzen, würklich nur so viele verschiedene vorkommen können, als die Zahl m Einheiten hat, so daß also, wenn man sie sämtlich entwickelt, und jedem von ihnen den Factor $\sqrt[m]{\left(\frac{\alpha}{\cos\beta}\right)}$ beygibt, die m verschiedenen Werthe gefunden seyn seyn werden, welche, bewiesenen algebraischen Lehren zufolge, $\sqrt[m]{(\alpha + \beta\sqrt{-1})}$ nothwendig haben muß.

Es ist aus dem vorigen Kapitel bekannt, daß zwey Zahlen, welche denselben Sinus und Cosinus be-

sitzen sollen, um irgend ein Vielfaches von 2π unterschieden seyn müssen. Wir finden in unsrer Formel die Zahl $\frac{b \pm 2n\pi}{m}$, in welcher für n nach Belieben alle Werthe, von o an, durch die successiven ganzen Zahlen fort, gesetzt werden dürfen. Solange also die specialisirten Werthe dieser Zahl noch nicht um 2π, oder irgend ein, positives oder negatives Vielfaches dieser Größe, verschieden sind, wird unsre Formel $\cos\left(\frac{b \pm 2n\pi}{m}\right) + \left[\sin\left(\frac{b + 2n\pi}{m}\right)\right]\sqrt{-1}$ verschiedene Werthe erhalten; sobald aber der genannte Umstand eintritt, wird sie auf die nemlichen Werthe wieder zurückkommen. Betrachten wir zuerst nur den Ausdruck der Zahl $\frac{b \pm 2n\pi}{m}$ so fern er jedes positive Vielfache von 2π in sich schließt, d. h. als $\frac{b + 2n\pi}{m}$, um zu sehn, wieviel verschiedene Werthe unsre Formel durch successives Aendern der völlig willkührlichen Zahl n annehmen kann. Und da ist offenbar, daß, solange man für n Werthe setzt, die kleiner sind als m, durchaus verschiedene Werthe für ihn hervorgehn müssen. Denn es mögen h und k zwey Zahlen, beyde kleiner als m bedeuten. Alsdann ist der Unterschied der beyden Ausdrücke $\frac{b + 2h\pi}{m}$, und $\frac{b + 2k\pi}{m}$ $= \frac{2(h-k)\pi}{m}$, und es versteht sich von selbst, daß $\frac{h-k}{m}$

weder 1, noch eine ganze Zahl seyn kann, weil jedes von ihnen schon für sich kleiner als m seyn soll, der Bruch $\frac{h-k}{m}$ also unfehlbar ein echter Bruch ist. Mithin wird, weil zwey solche Ausdrücke nicht um ein Vielfaches der Peripherie verschieden seyn können, Sinus und Cosinus des einen nicht identisch mit Sinus und Cosinus des andern seyn können. Und so gehn, wenn man in der Formel $\cos\left(\frac{b+2n\pi}{m}\right) + \left(\sin\frac{(b+2n\pi)}{m}\right)\sqrt{-1}$, für n successiv alle ganze Zahlen von o bis m (exclusive) setzt ebensoviele, von einander verschiedene, Werthe für ihn hervor.

Sobald aber für n eine ganze Zahl genommen werden sollte, welche größer ist als m, so wird unfehlbar der Ausdruck $\frac{b+2n\pi}{m}$ eine Zahl werden, welche wieder denselben Sinus und Cosinus besitzt, wie eine von denen, welche man schon früher gehabt hat, als man noch für n Werthe setzte, die kleiner als m waren. Denn es sey ein Werth von $n = pm + h$, wo p jede beliebige ganze Zahl bedeuten mag, h aber irgend eine von denen die noch kleiner sind als m. Hätte man für n bloß den Werth h gesetzt, so würde der Werth von $\frac{b+2n\pi}{m} = \frac{b+2h\pi}{m}$. Nimt man aber für $n = pm + h$, so wird er $\frac{b+2(pm+h)\pi}{m}$.

Der Unterschied zwischen dem ersten und diesem letzten ist $\frac{2pm\pi}{m} = 2p\pi$, ein Vielfaches von 2π, Es hat also der letzte ebendenselben Sinus und Cosinus wie der erste. Sobald man folglich bey der Specialisirung der Formel $\cos\left(\frac{b+2n\pi}{m}\right)+\left(\sin\frac{(b+2n\pi)}{m}\right)\sqrt{-1}$, mit den Werthen der Zahl n über m hinausgeht, nimt sie keine neue Bedeutungen mehr an, sondern fällt jedesmal in eine von denen wieder zurück, welche sie schon früher erhalten hat, als für n Werthe, kleiner als m, gesetzt wurden.

Was endlich die Gestalt $\cos\left(\frac{b-2n\pi}{m}\right)+\left(\sin\frac{[b-2n\pi]}{m}\right)\sqrt{-1}$ betrifft, so ist auch für sie sehr leicht zu zeigen, daß sie, man setze für n was man will, keine andre Werthe geben kann, als die, welche aus $\cos\left(\frac{b+2n\pi}{m}\right)+\left(\sin\frac{(b+2n\pi)}{m}\right)\sqrt{-1}$ abgeleitet sind. Es sey h irgend eine bestimmte ganze Zahl zwischen 0 und m, so wird $\frac{b-2h\pi}{m}$ eine von den Zahlen seyn, wovon unser letzter Ausdruck Sinus und Cosinus verlangt. Aber alsdann wird $m-h$ gleichfalls eine ganze Zahl, und also $\frac{b+2(m-h)\pi}{m}$, einer von den Werthen seyn, für welche schon bey der Specialisirung des früher betrachteten Ausdrucks

$\cos\left(\frac{b + 2n\pi}{m}\right) + \left(\sin\frac{[b + 2n\pi]}{m}\right)\sqrt{-1}$

der Werth gefunden ist. Nun aber ist der Unterschied zwischen den Zahlen $\frac{b + 2(m-h)\pi}{m}$, und $\frac{b - 2h.\pi}{m}$ $= \frac{2m\pi}{m} = 2\pi$, mithin haben beyde gleichen Sinus und Cosinus. Wollte man in dem Ausdruck $\frac{b - 2n\pi}{m}$ für n Werthe setzen, die größer als m wären, allgemein $n = pm + h$, so würden, weil der Unterschied zwischen $\frac{b - 2h\pi}{m}$ und $\frac{b - 2(pm + h)\pi}{m} =$ $\frac{pm\pi}{m} = p.\pi$, offenbar wieder gleiche Sinus und Cosinus zum Vorschein kommen, wie man schon erhalten hatte, als für n noch Werthe, die unter m waren, genommen wurden. Mithin gibt $\cos\left(\frac{b - 2n\pi}{m}\right)$ $\left(+ \sin\frac{[b - 2n\pi]}{m}\right)\sqrt{-1}$, man mag für n setzen was man will, auch nur m verschiedene Werthe, und zwar ganz dieselben, welche aus $\cos\left(\frac{b + 2n\pi}{m}\right)$ $\left(+ \sin\frac{[b + 2n\pi]}{m}\right)\sqrt{-1}$ entstehn, wenn man in diesem Ausdrucke für n successiv alle ganze Zahlen von o bis m substituirt.

Wenn wir also einen unmöglichen Ausdruck von der Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ zum Behuf einer Wurzelaus-

ziehung logarithmisch entwickeln, so ist es genug, falls aus den Tafeln die Zahl b aus der Gleichung $\frac{\alpha}{\beta} = \text{tang}\, b$ gefunden ist, ihren Werth durch

$$\frac{\alpha}{\cos b} [\cos(b + 2n\pi) + [\sin(b + 2n\pi)] \sqrt{-1}],$$

und wenn aus ihr die Wurzel des mten Grades gezogen werden sollte, diese durch $\sqrt[m]{\left(\frac{\cos b}{\alpha}\right)} \left[\cos\left(\frac{b + 2n\pi}{m}\right)\right.$ $\left. + \left[\sin\left(\frac{b + 2n\pi}{m}\right)\right] \sqrt{-1}\right]$ darzustellen, und in dem letzten Ausdrucke für n alle Werthe von o an bis m, allmälig zu substituiren. Daraus werden sogleich alle möglichen Werthe der verlangten Wurzel, mit Hülfe der Tafeln, welche die verlangten Sinus und Cosinus geben, hervorgehn.

Noch einer sehr wesentlichen Abkürzung ist dieses merkwürdige Verfahren der Wurzelausziehung fähig. Bey der logarithmischen Entwicklung des anfangs gegebenen unmöglichen Ausdrucks soll man zuerst, durch Hülfe der Tafeln, vermöge der Gleichung $\frac{\beta}{\alpha} = \text{tang}\, b$, die Zahl b finden. Sie selbst wird aber in der ganzen Rechnung nicht gebraucht, sondern immer nur Sinus und Cosinus von ihr, und anderer, unter der Form $\frac{b + n\, 2\pi}{m}$ enthaltenen. Nun stehn aber in unsern trigonometrischen Tafeln neben den Sinus, Cosinus, Tangenten, nicht die Zahlen selbst,

die ihnen gehören, sondern andre, die aber diesen Zahlen proportionirt sind. Denn die Formel $\frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2}$, kommt würklich, für alle Werthe von a genau berechnet, unter der Benennung Cosinus in den Tafeln vor. Aber neben der Reihe ihrer Werthe befinden sich nicht die der Zahl a selbst, wozu sie eigentlich gehören, sondern, statt dessen, die der Zahl $\frac{a}{2\pi}\,360^\circ$. Ebenso verhält es sich auch mit den Cosinus und Tangenten. Geometrisch ausgedrückt. Die Tafeln enthalten vollständig, für alle Kreisbögen, die nicht über den Quadranten hinaus gehn, die Sinus, Cosinus und Tangenten. Aber es sind nicht die Kreisbögen selbst, der Länge nach in Theilen des Radius ausgedrückt, (wie man sie in der That nehmen mußte, um jene ihre trigonometrischen Functionen zu berechnen), welche sich als deren zugehörige Zahlen in der ersten Columne der Tafeln finden. Sondern statt der Kreisbögen ist die Menge von Graden, Minuten, Secunden, gesetzt, welche sie, nach Maaßgabe ihrer Länge, enthalten müssen. Will man aber nur den Sinus und Cosinus einer Zahl wissen, so ist es völlig einerley, ob man die Zahl selbst, oder eine andre, ihr proportionale, nehmen will. Man behalte also, wenn man in den Tafeln, $\frac{\beta}{\alpha}$, in der Columne der Tangenten, aufsucht, sogleich die Zahl von Graden, Minuten, Secunden, welche in der ersten Columne daneben steht. Diese Zahl mag durch φ angedeutet

werden. Man setze alsdann statt cos b, sin b, geradezu cos φ, sin φ., oder allgemeiner statt sin $(b + 2n\pi)$, sin $(\varphi + n.360^\circ)$, statt cos $(b + 2n\pi)$, cos $(\varphi + n.360^\circ)$, und ebenso auch für cos und sin von $\frac{b + 2n\pi}{m}$, cos und sin von $\frac{\varphi + n\,360^\circ}{m}$. Dadurch wird der Gebrauch der Tafeln merklich erleichtert werden. Und so läßt sich endlich die mechanische Regel für Wurzelausziehungen aus unmöglichen Ausdrücken von der Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ in ihrer bequemsten Gestalt angeben. Man suche, um $\sqrt[m]{(\alpha + \beta\sqrt{-1})}$ zu erhalten, aus den trigonometrischen Tafeln den Bogen, welchem $\frac{\beta}{\alpha}$ als Tangente zugehört. Er heiße, wie ihn die Tafeln geben, in Graden u. s. w. ausgedruckt φ, alsdann ist $\sqrt[m]{(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})} = \sqrt[m]{\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)}$.

$$\left[\cos\left(\frac{\varphi + n\,360^\circ}{m}\right) \pm \left[\sin\left(\frac{\varphi + n.360^\circ}{m}\right)\right]\sqrt{-1}\right]$$

in welcher Formel man für n allmälig alle ganze Zahlen von o an bis zu m setzen muß, um die m verschiedenen Werthe zu erhalten, deren er fähig ist.

Was die Größe $\frac{\alpha}{\cos\varphi}$, wofür auch die ihr gleichgeltende $\frac{\beta}{\sin\varphi}$ gesetzt werden könnte, betrifft, so ist sie allemal positiv, die Berechnung des ersten Factors $\sqrt[m]{\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)}$ kann also nie einer Schwierigkeit unter-

worfen seyn; sie wird am leichtesten durch Hülfe der gemeinen Logarithmen geschehn.

Die bisher für unmögliche Ausdrücke dargestellte Methode der Wurzelausziehung läßt sich selbst auf mögliche bestimmte Zahlen anwenden, und hat den Vorzug, daß sie auch alsdann für die gesuchte Wurzel genau soviele Werthe darbietet, als der Grad derselben Einheiten in sich faßt. Soll aus einer positiven Zahl die Wurzel des mten Grades gezogen werden, so drücke man die Zahl selbst durch $a(\cos 2n\pi + \sin 2n\pi . \sqrt{-1})$ aus, welches offenbar, da $\cos 2n\pi = 1$; $\sin 2n\pi = 0$, ebensoviel als $a . 1$ oder a bedeutet. Alsdann ist $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{a} . \left(\cos \frac{2n\pi}{m} + \sin \frac{2n\pi}{m} . \sqrt{-1}\right)$. Hier bedeutet $\sqrt[m]{a}$ den positiven Werth, welchen die würkliche Ausziehung der Wurzel gibt. Aber die ihm als Factor beygefügte Größe ertheilt dem ganzen Ausdruck soviel verschiedene Werthe, als der Grad der verlangten Wurzel Einheiten enthält. Es ist nicht ohne Interesse, über die Verschiedenheit dieser Werthe zu reflectiren. Der erste, für $n = 0$, wird allemal 1; er ist der einzige mögliche, wenn m ungerade seyn sollte. Ist aber m gerade, so gibt es außer ihm noch einen möglichen, für $n = \frac{1}{2} m$. Alsdann wird nemlich $\left(\cos \frac{2n\pi}{m} + \sin \frac{2n\pi}{m} . \sqrt{-1}\right) = (\cos \pi + \sin \pi \sqrt{-1}) = -1$

Alle übrigen Werthe sind aber beständig unmöglich. Und zwar darf man, den anfänglichen abgerechnet, behaupten, daß allemal die beyden, welche von Anfang und Ende der Reihe, welche sie bilden, gleichweit abstehn, sich nicht in Absicht auf die Größe der Theile, woraus sie erzeugt werden, sondern bloß in Absicht auf das Zeichen des zweyten Theils, den sie enthalten, von einander unterscheiden. Der h^{te} vom Anfang ist $\left(\cos\frac{2h\pi}{m} + \sin\frac{2h\pi}{m}\sqrt{-1}\right)$; der h^{te} vom Ende, d. h. der $m-h^{te}$ vom Anfang $\left[\cos 2\frac{(m-h)\pi}{m} + \left(\sin\frac{[2.(m-h)\pi]}{m}\right)\sqrt{-1}\right]$. Nun aber ist $\cos\left[\frac{2(m-h)\pi}{m}\right] = \cos\left(2\pi - \frac{2h\pi}{m}\right)$ $= \cos\frac{2h\pi}{m}$; $\sin\left[\frac{2(m-h)\pi}{m}\right] = -\sin\frac{2h\pi}{m}$ mithin der lezte Ausdruck $= \left(\cos\frac{2h\pi}{m} - \sin\frac{2h\pi}{m}.\sqrt{-1}\right)$. Man braucht also, wenn es auf würkliche individuelle Berechnung eines solchen Ausdrucks ankommt, nur die erste Hälfte der verschiedenen unmöglichen Werthe. die er in sich faßt, unmittelbar abzuleiten. Denke man sich alle die verschiedenen Werthe, welche die Form $\cos\frac{2n\pi}{m} + \sin\frac{2n\pi}{m}.\sqrt{-1}$ annehmen kann, als Glieder einer Reihe, so darf man behaupten, daß dieselben Glieder, nur in einer andern Folge, wieder zum Vorschein kommen, wenn sie sämtlich mit irgend

einem unter ihnen multiplicirt werden. Es sey, allgemein, das k^{te} unter ihnen dasjenige, wodurch man die übrigen multiplicirt. So ist der allgemeine Ausdruck für sie: $\cos\frac{2(n+k)\pi}{m} + \sin\frac{2(n+k)\pi}{m}.\sqrt{-1}$. Aus ihm erhält man die Reihe ihrer jetzigen Werthe, wenn man für n die Zahlen 0, 1, 2.. nach der Ordnung setzt. So ist also nun das erste $\cos\frac{2k\pi}{m} + \sin\frac{2k\pi}{m}.\sqrt{-1}$, was vorher das k^{te} war; alle, welche vorher auf das k^{te} folgten, werden jezt in ungestörter Ordnung nach dem ersten folgen müssen. An dasjenige, was vorher das lezte war, und welches jezt das $m-k-1^{te}$ ist, wird sich das $m-k^{te}$, mithin dasjenige was vorher das erste war, wieder anschließen, und sich daran nach der Ordnung das vorherige zweyte, dritte, u. s. w., bis zum $k-1^{ten}$ anreihen, welches die neue Reihe beschließen wird. Setzte man also die verschiedenen Werthe, welche $\sqrt[m]{1}$ haben kann, im Kreise herum neben einander, so würde die Reihe der Producte welche herauskommen, wenn man mit einem von ihnen, dem k^{ten}, sie alle multipliciren wollte, sogleich dadurch erhalten werden, wenn man vom k^{ten} Gliede des vorigen Ringes den Anfang machte, und nun, in der vorigen Ordnung, in demselben herumginge, bis man auf den Anfang zurückgekommen wäre.

Was die Wurzeln höherer Grade aus negativen Zahlen betrifft, so gelten von ihnen ganz ähnliche Sätze. Der logarithmisch entwickelte Ausdruck einer negativen Zahl, $-a$, ist $a.(-1) = a.[\cos(2n+1)\pi + \sin(2n+1)\pi.\sqrt{-1}]$. Soll also aus ihr die Wurzel des m^{ten} Grades gezogen werden, so erhält man $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{a}.(\cos\frac{2n+1}{m}\pi + \sin\frac{2n+1}{m}\pi.\sqrt{-1})$, wo der erste Factor, $\sqrt[m]{a}$, den reellen positiven Werth bedeutet, welchen die Wurzelausziehung allemal darbieten muß, der zweyte Factor hingegen, indem man für n allmälig die Zahlen 0, 1, 2, u. s. w. an die Stelle setzt, soviele verschiedene Werthe darbietet, als der Grad der auszuziehenden Wurzel Einheiten enthält. Ist m gerade, so kann nie $\frac{2n+1}{m}$ eine ganze Zahl, mithin nie die vorliegende Form Etwas mögliches werden. Ist m ungerade, so gibt es einen Fall, wo diese Form einen möglichen Werth erhält, wenn nemlich $\frac{2n+1}{m} = 1$, also $n = \frac{m-1}{2}$. Alsdann verwandelt sie sich in -1, so daß für $\sqrt[m]{(-a)}$ der mögliche Werth $-\sqrt[m]{a}$ gefunden wird. Was die unmöglichen Werthe betrifft, so gilt von ihnen, mit geringen Modificationen, dasselbe, wie von denen für $\sqrt[m]{a}$.

Wir können, mit diesem Algorithmus für unmögliche Ausdrücke versehn, zu verschiedenen, im Vorhergehenden vorgekommenen Lehren zurückkehren, die theils einer Begründung, theils einer Zurückführung auf bestimmte mechanische Regeln bedürftig sind.

I. Es ist im vorhergehenden, bey den Betrachtungen über die Zerlegung von Formen höherer Grade in Factoren des ersten Grades der Satz problematisch angenommen, daß jeder unmögliche arithmetische Ausdruck auf die Gestalt $a + b\sqrt{-1}$ zurückgebracht werden könne. Wir sind jetzt im Stande, die unbedingte Gültigkeit dieses wichtigen arithmetischen Theorems zu beweisen. Unmögliche Ausdrücke entstehn zuerst, wenn man bestimmte Zahlen unter das Zeichen einer beliebigen Wurzelausziehung stellt. Nun ist eben bewiesen, daß alle Werthe von $\sqrt[m]{a}$ oder $\sqrt[m]{(-a)}$ auf die Gestalt $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ zurückkommen müssen. Sie entstehen ferner, wenn man solche Wurzelgrößen, mit sich selbst, oder mit möglichen Größen verbunden, d. h. Formen, die sich auf die Gestalt $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ reduciren lassen, selbst wieder neuen arithmetischen Operationen unterwirft. Wir haben aber die Regeln abgeleitet, nach denen die Resultate solcher Rechnungen mit Ausdrücken von der Gestalt $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ sogleich durch andre von der nemlichen Gestalt dargestellt werden können. Und so führen diese, im gegenwärtigen Kapitel entwickelten Regeln von selbst den Beweis jenes Theorems herbey.

Der Umstand ist in der That sehr merkwürdig, daß man alle die Unmöglichkeiten, welche entstehen können, wenn man beliebig gewählte Zahlen unter die Zeichen höhere arithmetischer Operationen stellt, immer auf eine einzige, und zwar die einfachste unter allen, diejenige, welche bey der Ausziehung der Quadratwurzel aus negativen Zahlen statt findet, zurückzuführen vermag. In so fern erscheinen unmögliche Ausdrücke viel einfacher als irrationale, übrigens mögliche. Die Wurzelausziehungen höherer Grade lassen sich nur dann auf andre von niedrigern zurückbringen, wenn ihre Exponenten aus Factoren zusammengesetzt sind. Es fehlt also sehr viel, daß man behaupten dürfte, die Ausziehung der Wurzeln, sofern sie mögliche bestimmte Werthe gibt, könne auf Ausziehung der Quadratwurzel reducirt werden. Schon bey der Ausziehung der Cubicwurzel findet dies durchaus nicht statt; diese Operation muß nach eigenthümlichen Regeln vollzogen werden, und ihr Resultat kann durch keine Verbindung von Quadratwurzeln gefunden werden. Auch wird allemal, wenn man mit logarithmisch entwickelten unmöglichen Formen rechnet, der mögliche Factor den sie bey sich führen, durch alle die Wurzelausziehungen laufen müssen, welche an den Ausdrücken selbst vollzogen werden sollten.

II. Das würkliche Rechnen mit unmöglichen Formen wird besonders bey der Auflösung der Gleichungen, und den Untersuchungen über die Wurzeln derselben häufig gefodert. Schon die cubischen Gleichungen

haben uns im Vorhergehenden auf Ausdrücke geführt, die nur dadurch zu einem bestimmten Resultate gebracht werden können. Die allgemeine Form, unter welche diese Ausdrücke gehören, ist eigentlich die folgende. Es mögen a und b beliebige mögliche, n irgend eine bestimmte Zahl seyn; man soll den Werth von $\sqrt[n]{(a+b\sqrt{-1})}+\sqrt[n]{(a-b\sqrt{-1})}$ darstellen.

Wenn $\frac{b}{a}=\text{tg}\,\varphi$, so ist dieser Ausdruck, logarithmisch entwickelt,

$$\sqrt[n]{}.\left[\frac{a}{\cos\varphi}.[\cos(\varphi+2h\pi)+\sin(\varphi+2h\pi).\sqrt{-1}]\right]$$

$$+\sqrt[n]{}\left[\frac{a}{\cos\varphi}[\cos(\varphi+2k\pi)-\sin(\varphi+2k\pi).\sqrt{-1}]\right]$$

mithin sein zusammengezogener Werth

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{\cos\varphi}}\right)\left[\cos\frac{(\varphi+2h\pi)}{n}+\cos\frac{(\varphi+2k\pi)}{n}\right.$$

$$\left.+\left(\sin\frac{[\varphi+2h\pi]}{n}-\sin\frac{[\varphi+2k\pi]}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$$

Offenbar also gibt er, da man sowohl für k, als auch für h, alle Zahlen von o bis n setzen muß, wenn man alle möglichen Combinationen, welche der Ausdruck gestattet, vollständig aufstellt, eine Reihe von k.h verschiedenen Werthen. Unter diesen aber werden n verschiedene allemal mögliche Größen seyn. Denn wenn man, bey der Entwicklung von den Werthen der beyden Wurzelgrößen diejenigen, welche nach der Ordnung unsrer Formel von gleicher Zahl sind, mit einander combinirt, d. h. h = k setzt, so gibt sie

$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{\cos\varphi}\right)}\left(2\cos\frac{\varphi+2h\pi}{n}\right)=\sqrt[n]{(a+b\sqrt{-1})}$
$+\sqrt[n]{(a-b\sqrt{-1})}$ ein Ausdruck, welcher allemal möglich ist, und n verschiedene Werthe in sich faßt.

Man kann auf diese Art die Auflösung der cubischen Gleichungen, welche wir früher (pag. 82) gefunden haben, zur würklichen Berechnung brauchbar machen. Wenn eine solche Gleichung die Gestalt $y^3+fy+g=0$ besitzt, so ist für sie

$$y=\sqrt[3]{\left(\frac{-g+\sqrt{[g^2+\frac{4}{27}f^3]}}{2}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{-g-\sqrt{[g^2+\frac{4}{27}f^3]}}{2}\right)}$$

Wenn es darauf ankommt, den Werth dieses Ausdrucks würklich zu berechnen, so müssen zwey Fälle unterschieden werden.

Die Schwierigkeiten bey dem Gebrauche dieser Formel sind größer, als sie beym ersten Blicke scheinen. Selbst dann, wenn sich den in ihr verlangten Wurzelausziehungen keine Unmöglichkeit entgegensetzt, darf sie nicht ohne Rechtfertigung gebraucht werden. Denn da sie, in ihrem ganzen Umfange genommen, neun verschiedene Werthe enthält, und von diesen nur drey der cubischen Gleichung angehören können, so fragt sich bey jedem einzelnen erst noch, ob er der rechte ist oder nicht. Der Fehler liegt eigentlich schon in der ersten Voraussetzung, die man, um zur Auflösung der cubischen Gleichungen zu gelangen, gemacht hat. Man fingirt bekanntlich, daß der Werth von y, welcher der Gleichung $y^3+fy+g=0$ Genüge leistet,

die Gestalt $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ habe, nimt also gleich zu Anfang eine Form, die allgemein verstanden, zu viel enthält, für das Gesuchte an. Daraus leiten sich alsdann, wie oben geschehn ist, die beyden Bedingungen, daß $A + B = -g$, und $\sqrt[3]{(AB)} = -\frac{1}{3} f$ ab, aus denen die bestimmten Werthe von A und B weiter erfolgen.

Wir wollen, um unsre Formel bestimmt brauchbar zu machen, zwey Fälle unterscheiden.

1. Es sey A sowohl als B möglich, mithin $g^2 + \frac{4}{27} f^3$ eine positive Zahl. Nennen wir den Werth, welchen die würkliche Wurzelausziehung aus A gibt, a; ebenso den aus $B = b$, so hat $\sqrt[3]{A} = a . \sqrt[3]{1}$ die drey Werthe a; $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$ a; $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$ a. Auf gleiche Weise erhält $B \sqrt[3]{}$ die drey Werthe b; $\left[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right]$ b; $\left[\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right]$ b. Es frägt sich nun, welche von ihnen combinirt werden müssen, um diejenigen speciellen Werthe von $\sqrt[2]{A} + \sqrt[3]{B}$ hervorzubringen, die der cubischen Gleichung Genüge leisten.

Und hier entscheidet die bey der Auflösung der cubischen Gleichung festgesetzte Bedingung daß $\sqrt[3]{A} . \sqrt[3]{B} = -\frac{1}{3} f$, d. h. daß dieses Product eine mögliche Größe seyn soll. Es gibt nur drey Combinationen die ihr Genüge leisten, sie also sind es allein,

welche die Wurzeln der cubischen Gleichung geben können.

Von den 3 Werthen des $\sqrt[3]{B}$, welche b, $\left[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right]$ b, $\left[\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right]$ b sind, kann mit dem ersten von $\sqrt[3]{A}$, d. h. a, nur der erste combinirt werden, wenn das Product aus beyden eine mögliche Zahl werden soll. Mit dem zweyten von $\sqrt[3]{A}$, welcher $\left[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right]$ a ist, unter eben dieser Bedingung nur der dritte von $\sqrt[3]{B}$, d. h. $\left[\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right]$ b, weil nur er mit jenem ein mögliches Product hervorbringt. Mit dem dritten von $\sqrt[3]{A}$ endlich, $\left[\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right]$ a, kann nur der zweyte von $\sqrt[3]{B} = \left[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right]$ b sich vereinigen, weil jeder der beyden andern mit jenem ein unmögliches Product hervorbringen würde. So sind also die drey Wurzeln der cubischen Gleichung für diesen Fall

$$a+b$$

$$a\left[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right]+b\left[\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right]=\frac{-(a+b)+(a-b)\sqrt{-3}}{2}$$

$$a\left[\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right]+b\left[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right]\ \frac{-(a+b)-(a-b)\sqrt{-3}}{2}$$

Eine cubische Gleichung also von der Form $y^3+fy+g=0$ wenn in ihr $g^2+\frac{4}{27}f^3$ positiv ist, d. h.

entweder, wenn f und g beyde positiv sind, oder wenn, falls f negativ seyn sollte, $(\frac{1}{3} f)^3$, abgesehn vom Zeichen, eine kleinere Zahl ist, als $(\frac{1}{2} g)^2$ hat nur eine mögliche Wurzel. Sie läßt sich durch gemeine Wurzelausziehung vermöge unsrer Formel finden. Aus ihr ergeben sich ohne weitere Rechnung die beyden unmöglichen Wurzeln, welche noch außer ihr der Gleichung Genüge leisten.

2. Es sey A sowohl als B unmöglich, mithin $(g^2 + \frac{4}{27} f^3)$ eine negative Zahl. Alsdann wird $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$, wenn die Werthe dieses Ausdrucks berechnet werden sollen, nur durch Hülfe unsres lezten Algorithmus für unmögliche Größen gefunden werden können. Nennt man $\frac{-g}{2} = \alpha$, und $\frac{1}{2}\sqrt{-(g^2 + \frac{4}{27} f^3)} = \beta$, so wird $A = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, und $B = \alpha - \beta\sqrt{-1}$, mithin $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{(\alpha + \beta\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(\alpha - \beta\sqrt{-1})}$ Man setze also, der bekannten Regel, für die Entwicklung solcher Ausdrücke gemäß $\frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{tg} \varphi$, d. h. also hier $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{-(g^2 + \frac{4}{27} f^3)}}{\frac{g}{2}} = \sqrt{-\frac{(g^2 + \frac{4}{27} f^3)}{g^2}}$

$$= \sqrt{-\left[1 + \frac{4}{27}\frac{f^3}{g^2}\right]}.$$

Dieser Ausdruck ist aber, um φ zu berechnen, noch etwas unbequem, und läßt sich abkürzen. Bekanntlich ist $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sqrt{(1 - \cos \varphi^2)}}{\cos \varphi}$

$= \sqrt{\left[\frac{1}{\cos\varphi^2} - 1\right]}$. Man setze also $\sqrt{\left[\frac{-27g^2}{4f^3}\right]}$ oder kürzer $\sqrt{\frac{[-(\frac{1}{2}g)^2]}{(\frac{1}{3}f^3)}} = \cos\varphi$, so wird $\sqrt{\left[\frac{1}{\cos\varphi^2} - 1\right]} = \mathrm{tg}\,\varphi = \sqrt{\left[-\left(\frac{4f^3}{27g^2} + 1\right)\right]}$, mithin gerade dasselbe, was vorher $= \mathrm{tg}\,\varphi$ genommen werden sollte. Ist auf diese Art aus den Tafeln φ gefunden, so erhält man für $\sqrt[3]{A}$ die drey Werthe:

$$\sqrt[3]{\left[\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right]}(\cos\tfrac{1}{3}\varphi + \sin\tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{-1});\ \sqrt[3]{\left[\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right]}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi}{3}\right).\sqrt{-1}\right];$$

$$\sqrt[3]{\left[\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right]}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 4\pi}{3}\right) + \sin\left[\frac{\varphi + 4\pi}{3}\right].\sqrt{-1}\right].$$

Die nemlichen bekommt man auch für $\sqrt[3]{B}$, mit dem einzigen Unterschiede, daß in ihnen die zweyten Theile der eingeklammerten Factoren, d. h. diejenigen, welche mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt sind, das umgekehrte Zeichen erhalten.

Und jezt sind wieder nur drey Combinationen zwischen den Werthen von $\sqrt[3]{A}$ und denen von $\sqrt[3]{B}$ möglich, welche der Foderung, worauf die Auflösung der cubischen Gleichung wesentlich gegründet ist, daß nemlich $\sqrt[3]{A}\,.\,\sqrt[3]{B}$ kein unmögliches Product geben soll, Genüge leisten; sie sind es also allein, welche die verlangten Wurzeln geben können.

Nimt man den ersten Werth von $\sqrt[3]{A}$, welcher $\sqrt[3]{\left[\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right]}.(\cos\frac{1}{3}\varphi + \sin\frac{1}{3}\varphi.\sqrt{-1})$ ist, so zeigt sich lediglich der erste von $\sqrt[3]{B}$, d. h. $\sqrt[3]{\left[\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right]}(\cos\frac{1}{3}\varphi - \sin\frac{1}{3}\varphi.\sqrt{-1})$ welcher mit ihm ein mögliches Product, $(\cos 0 + \sin 0.\sqrt{-1})\sqrt[3]{\left[\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right]^2} = \sqrt[3]{\left[\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right]^2}$ hervorbringt. Ganz auf die nemliche Weise wird nur der zweyte Werth von $\sqrt[3]{A}$, mit dem zweyten von $\sqrt[3]{B}$, und ebenso endlich der dritte Werth von $\sqrt[3]{A}$ mit dem dritten von $\sqrt[3]{B}$ combinirt werden dürfen, wenn die Bedingung daß $\sqrt[3]{A}.\sqrt[3]{B}$ ein mögliches Product geben muß, nicht überschritten werden soll.

Man erhält also in dem Falle, wo $g^2 + \frac{4}{27}f^3$ eine negative Zahl ist, d. h. wo f negativ, und dabey, abstrahirt vom Zeichen, $(\frac{1}{2}g)^2$ kleiner als $(\frac{1}{3}f)^3$ für die cubische Gleichung $y^3 + fy + g = 0$ drey mögliche Wurzeln. Die eben vorhin für dieselben gefundenen Ausdrücke sind noch einer kleinen Abkürzung fähig. Man setzt zuerst, um die logarithmische Entwicklung zu machen, $\cos\varphi = \sqrt{\left[\frac{-(\frac{1}{2}g)^2}{(\frac{1}{3}f)^3}\right]}$. Zulezt erscheint im Resultate der Factor $\sqrt[3]{\left[\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right]}$ wieder.

Nun war $\alpha = -\frac{g}{2}$, mithin wird $\frac{\alpha}{\cos\varphi} = -\frac{g}{2} . \sqrt{\left[\frac{-(\frac{1}{3}f)^3}{(\frac{1}{2}g)^2}\right]}$ $= \sqrt{-(\frac{1}{3}f)^3}$. Es wird folglich $\sqrt[3]{\left[\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right]} = \sqrt{(\frac{1}{3}f)}$ offenbar eine mögliche positive Größe, weil f Etwas in sich selbst negatives ist.

Nehmen wir nun die Werthe von $\sqrt[3]{A}$ und $\sqrt[3]{B}$, welche für unsre cubische Gleichung gehören, zusammen, so erhalten wir die drey Wurzeln

$2 . \sqrt{(-\frac{1}{3}f)} \cos \frac{1}{3}\varphi$

$2 . \sqrt{(-\frac{1}{3}f)} \cos \left[\frac{\varphi + 360^\circ}{3}\right] = 2 . \sqrt{(-\frac{1}{3}f)} \cos (120^\circ + \frac{1}{3}\varphi)$

$2 . \sqrt{(-\frac{1}{3}f)} \cos \left[\frac{\varphi + 720^\circ}{3}\right] = 2 . \sqrt{(-\frac{1}{2}f)} \cos (240^\circ + \frac{1}{3}\varphi)$

vorausgesetzt, daß φ ein Winkel ist, dessen Cosinus $= \sqrt{\left[\frac{(\frac{1}{2}g)^2}{-\frac{1}{3}f)^3}\right]}$ ist, der also nach dieser Formel zu Anfang der Berechnung aus den Tafeln gefunden werden muß.

Man kann auch, wenn man will, die beyden letzten Wurzeln der cubischen Gleichung auf die erste zurückführen. Da $120^\circ = 90^\circ + 30^\circ$, so ist $\cos 120 = -\frac{1}{2}$, $\sin 120 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Da $240^\circ = 180^\circ + 60^\circ$, so wird $\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$, $\sin 240 = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. Man darf also für $\cos (120^\circ + \frac{1}{3}\varphi) = -\frac{(\cos\frac{1}{3}\varphi + \sqrt{3} . \sin\frac{1}{3}\varphi)}{2}$

und für $\cos (240^\circ + \frac{1}{3}\varphi) = -\frac{(\cos\frac{1}{3}\varphi - \sqrt{3} . \sin\frac{1}{3}\varphi)}{2}$

setzen. Und so ausgedrückt sind die drey Wurzeln der Gleichung

$$2.\sqrt{(-\tfrac{1}{3}f)}.\cos\tfrac{1}{3}\varphi$$

$$-2.\sqrt{(-\tfrac{1}{3}f)}.\left[\frac{\cos\tfrac{1}{3}\varphi+\sin\tfrac{1}{3}\varphi.\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$-2.\sqrt{(-\tfrac{1}{3}f)}\left[\frac{\cos\tfrac{1}{3}\varphi-\sin\tfrac{1}{3}\varphi.\sqrt{3}}{2}\right]$$

Zur würklichen Berechnung sind aber diese Ausdrücke kaum so bequem als die zuerst gefundenen.

III. Dieselbe Methode, welche für die Auflösung der cubischen Gleichungen gebraucht worden ist, läßt sich auch auf Gleichungen des vierten Grades anwenden. Sie ist mit Fleiß bis auf diese Stelle verspart worden, weil ohne die Rechnung mit unmöglichen Ausdrücken, und die Möglichkeit, die Wurzeln einer cubischen Gleichung berechnen zu können, sich kein Gebrauch von ihr machen läßt.

Wir wollen eine unbestimmte Gleichung des vierten Grades (eine biquadratische) annehmen, und dabey voraussetzen, was bekanntlich allemal durch eine leichte Operation geschehn kann, das in ihr das erste Glied nach dem höchsten fortgeschafft sey. Ihre Form wird diesem gemäß $x^3 = ax^2 + bx + c$ seyn.

Auf ähnliche Weise, wie bey der Auflösung cubischer Gleichungen fingirt wurde, daß ihre Wurzel als Summe von den Cubicwurzeln zweyer aus ihren Coefficienten zusammengesetzter Ausdrücke gedacht werden könnte, wollen wir hier fingiren, daß der allgemeine Werth der Wurzel für eine Gleichung des vier-

ten Grades als Summe von drey Quadratwurzeln aus bestimmten, von den Coefficienten der Gleichung selbst abhängigen Größen anzunehmen sey, mithin $x = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$ setzen. Können wir für α, β, γ, Werthe, die sich aus a, b, c, zusammensetzen, und dabey den Foderungen der Gleichung Genüge leisten, würklich entdecken, so ist die Absicht der Untersuchung erreicht.

Zuerst also berechnen wir den Werth von $x^2 = \alpha + \beta + \gamma . + 2 [\sqrt{(\alpha\beta)} + \sqrt{(\alpha\gamma)} + \sqrt{(\beta\gamma)}]$. Es sey, der Kürze wegen $\alpha + \beta + \gamma = \overset{1}{C}$, so ergibt sich durch Transposition, $x^2 - \overset{1}{C} = 2 [\sqrt{(\alpha\beta)} + \sqrt{(\alpha\gamma)} + \sqrt{(\beta\gamma)}]$. Aufs Neue zum Quadrat erhoben wird $x^4 - 2\overset{1}{C}x^2 + \overset{1}{C}{}^2 = 4(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) + 8.[\sqrt{(\alpha^2\beta\gamma)} + \sqrt{(\alpha\beta^2\gamma)} + \sqrt{(\alpha\beta\gamma^2)}]$. Der letzte Theil auf der zveyten Seite der Gleichung wird, nach Absonderung des seinen Gliedern gemeinschaftlichen Factors, $8.\sqrt{(\alpha\beta\gamma)} (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})$ d. h., da $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} = x$ gesetzt war, $8.\sqrt{(\alpha\beta\gamma)}\, x$. Nennen wir $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \overset{2}{C}$, und $(\alpha\beta\gamma) = \overset{3}{C}$, wie denn in der That diese Größen, wenn man α, β, γ, als Elemente ansieht, als Combinationen der zweyten und dritten Classe aus ihnen angesehn werden müssen, so erhält die lezte Gleichung den abgekürzten Ausdruck

$$x^4 = 2\overset{1}{C}x^2 + 8\sqrt{\overset{3}{C}}.x - (\overset{1}{C}{}^2 - 4\overset{2}{C}).$$

Soll sie also identisch mit der anfänglich gegebenen seyn, so müssen die Coefficienten gleichhoher Glieder

in beyden zusammenstimmen. Mithin wird $a = 2\overset{1}{C}$, also $\frac{1}{2}a = \overset{1}{C}$; $b = 8\sqrt{\overset{3}{C}}$, folglich $\overset{3}{C} = + \frac{b^2}{64}$;

$c = -(\overset{1}{C}{}^2 - 4\overset{2}{C})$, daher $\overset{2}{C} = \frac{a^2 + 4c}{16}$.

Diese Bestimmungen geben freylich die drey fingirten Größen, α, β, γ, noch nicht geradezu, aber sie machen es möglich, ihre würkliche Berechnung zu vollführen. Denn wenn von drey unbekannten Größen erstlich die Summe, $\alpha + \beta + \gamma = \overset{1}{C}$; zweytens die Summe ihrer zu zwey combinirten Producte, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \overset{2}{C}$; und endlich das Product aus allen dreyen, $\alpha\beta\gamma = \overset{3}{C}$, bekannt ist, so kann man daraus jede dieser Größen entdecken. Man deute sie sämtlich durch das unbestimmte Zeichen z an. Alsdann wird die cubische Gleichung $\overset{3}{z} - \overset{1}{C}z^2 + \overset{2}{C}z^1 - \overset{3}{C} = 0$, wenn man sie würklich auflöst, in ihren drey Wurzeln die bestimmten Werthe der gesuchten Größen α, β, γ, darbieten.

Daraus also entspringt folgende Regel für die Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Ist eine solche in der Form $x^4 = ax^2 + bx + c$ gegeben, so bilde man erst aus ihren Coefficienten die folgende cubische Hülfsgleichung

$$z^3 - \tfrac{1}{2}az^2 + \frac{(a^2 + 4c)}{16}z^1 - \frac{b^2}{64} = 0$$

Man löse diese cubische Gleichung würklich auf, und es werden, wenn ihre Wurzeln α, β, γ, sind, die

eigentlich gesuchten der anfänglich gegebenen biquadratischen Gleichung in dem Ausdrucke $x = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$ enthalten seyn.

Offenbar ist auch dieser Ausdruck reicher an einzelnen Werthen, als es die Aufgabe sodert. Eine Gleichung des vierten Grades kann nur vier verschiedene Werthe haben, und er bietet, da jeder von seinen drey Theilen zweydeutig ist, wenn man alle Combinationen macht, deren 8 verschiedene dar. Indessen ist es hier leichter, die der vorliegenden Absicht entsprechenden auszuheben, als es bey den cubischen Gleichungen war. Es ist eine von den Foderungen, die sich in der vorhergehenden Rechnung darboten, daß $\sqrt[3]{C} = \sqrt{a} . \sqrt{\beta} . \sqrt{\gamma} = \frac{b}{8}$ seyn muß. Man wird folglich nur solche von den Werthen der Größen $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$ nehmen dürfen, die jenes Product immer mit dem nemlichen Zeichen versehen (positiv oder negativ, jenachdem es b ist) ausfallen lassen. Dadurch aber wird immer, wenn von zweyen seiner Factoren die Zeichen angenommen sind, das des dritten von selbst, auf eine einzige Weise, bestimmt; die Zahl der möglichen Annahmen reducirt sich eben deswegen auf die Hälfte, und es bleibt keine Unbestimmtheit wegen der Wurzeln der gegebenen Gleichungen zurück.

Uebrigens aber hängt die Beschaffenheit der Wurzeln, welche die biquadratische Gleichung besitzt, von denen der cubischen Hülfsgleichung ab, und es sind in

dieser Rücksicht mehrere, der näheren Betrachtung nicht unwürdige Fälle möglich.

1. Die Hülfsgleichung hat drey mögliche positive Wurzeln. Alsdann werden auch die in dem Ausdrucke $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}$ enthaltenen Werthe sämtlich mögliche Größen seyn.

2. Die Hülfsgleichung hat drey mögliche, aber nicht durchaus positive Wurzeln. Ist nur eine von ihnen negativ, so wird $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}$ allemal unmöglich. Sind zwey negativ, so werden nur für den Fall, daß diese beyden unter einander gleich sind, von den vier Werthen des Ausdrucks $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}$ zwey möglich und gleich unter einander, während die beyden andern unmöglich bleiben. Der Fall, daß alle drey Wurzeln der Hülfsgleichung negativ wären, kann nicht vorkommen. Denn alsdann könnte $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}\cdot\sqrt{\gamma}$ nicht, wie es seyn muß $=\frac{b}{8}$, d. h. eine mögliche Größe seyn.

3. Die Hülfsgleichung enthält zwey unmögliche Wurzeln, wobey sich, der Natur der cubischen Gleichungen gemäß, von selbst versteht, daß die dritte eine mögliche Größe seyn muß. Man darf hier noch hinzusetzen, eine positive. Denn, wenn von den Größen α, β, γ, zwey unmöglich, die eine von der Form $f+g\sqrt{-1}$, die andre also von der Form $f-g\sqrt{-1}$ seyn soll, so muß die dritte möglich seyn, wenn das Product aus allen drey eine mögliche Größe werden soll, mithin das, was in dieser dritten unter dem Wurzelzeichen

steht, eine positive Zahl. Es mögen also die drey Wurzeln der cubischen Hülfsgleichung, wenn α eine positive, f und g mögliche Größen bedeuten, seyn α, $f+g\sqrt{-1}$, $f-g\sqrt{-1}$. Alsdann sind die der biquadratischen unter dem Ausdruck $\sqrt{\alpha}+\sqrt{(f+g\sqrt{-1})}$ $+\sqrt{(f-g\sqrt{-1})}$ enthalten. Man darf aber bey der Ausziehung der Quadratwurzel in diesen drey Theilen nur solche Werthe nehmen, die ein Product von vorgeschriebenem Zeichen $=\frac{b}{8}$ hervorbringen. Dadurch also wird, wie im ersten Falle, die Menge der möglichen Combinationen auf vier herabgebracht. Wir müssen indessen hier diese Combinationen würklich ausführen, um zu sehn, ob die Resultate, d. h. die Wurzeln der biquadratischen Gleichung, möglich oder unmöglich werden.

Es sey also zuerst b in sich positiv, mithin $\frac{b}{8}$ positiv. Jene drey Theile sollen folglich so beschaffen seyn, daß sie ein positives Product hervorbringen. Hat man also von den beyden lezten zugleich die positiven, oder zugleich die negativen Werthe genommen, so muß der erste, $\sqrt{a}$, positiv seyn. Hat man aber von den beyden lezten verschieden bezeichnete Werthe gesetzt, so muß der erste negativ genommen werden. Es sind also die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$+\sqrt{a}+\sqrt{(f+g\sqrt{-1})}+\sqrt{(f-g\sqrt{-1})}$$
$$+\sqrt{a}-\sqrt{(f+g\sqrt{-1})}-\sqrt{(f-g\sqrt{-1})}$$
$$-\sqrt{a}+\sqrt{(f+g\sqrt{-1})}-\sqrt{(f-g\sqrt{-1})}$$
$$-\sqrt{a}-\sqrt{(f+g\sqrt{-1})}+\sqrt{(f-g\sqrt{-1})}$$

Wäre aber b eine negative Größe, so müßten jene drey Werthe so eingerichtet werden, daß ihr Product eine negative Zahl würde, und alsdann wären die Wurzeln der Gleichung

$$-\sqrt{a}+\sqrt{(f+g\sqrt{-1})}+\sqrt{(f-g\sqrt{-1})}$$
$$-\sqrt{a}-\sqrt{(f+g\sqrt{-1})}-\sqrt{(f-g\sqrt{-1})}$$
$$+\sqrt{a}+\sqrt{(f+g\sqrt{-1})}-\sqrt{(f-g\sqrt{-1})}$$
$$+\sqrt{a}-\sqrt{(f+g\sqrt{-1})}+\sqrt{(f-g\sqrt{-1})}$$

In beyden Fällen sind zwey von diesen vier Werthen möglich, die beyden andern aber unmöglich.

IV. Da wir durch Hülfe der vorhergehenden Regeln im Stande sind, für jede Wurzelgröße alle die einzelnen verschiedenen Bedeutungen anzugeben, deren sie nach Maaßgabe des Grades der in ihr gefoderten Wurzelausziehungen fähig ist, so befinden wir uns gleichfalls im Stande, über Rechnungen, die an solchen Wurzelgrößen vollzogen werden sollen, bestimmte Principien aufzustellen.

Schon in den Elementen der Arithmetik erscheinen einfache Wurzelgrößen, d. h. solche, in denen eine, beliebig angenommene, positive Zahl unter das Zeichen einer Wurzelausziehung gestellt wird. Potenzen mit gebrochenen Exponenten kommen, wenn man ihre eigentliche Bedeutung angeben will, auf solche Wurzelgrößen zurück; und um die Grundregeln der Potenzenrechnung abzuleiten, kann die Arithmetik nicht umhin, jene Radicalgrößen in Betrachtung zu ziehn. Aber sie vermeidet alle Schwierigkeiten derselben, indem sie von

der Vieldeutigkeit eines solchen Ausdrucks gänzlich abstrahirt. Wenn aus einer positiven Zahl die Wurzel eines beliebigen Grades gezogen werden soll, so ist einer unter den Werthen derselben, aber auch nur ein einziger, selbst wieder eine positive Zahl. Beschränkt man die Bedeutung der Radicalgröße auf diesen einen Werth, so kann sie als eine einzige, vollkommen bestimmte, Zahl angesehn werden, und alsdann lassen sich die Regeln der Rechnung mit ihr ohne Schwierigkeit ableiten. In der That sind die Beweise aller Sätze in der Elementar-Arithmetik, welche Potenzen mit gebrochenen Exponenten betreffen, auf die stillschweigende Voraussetzung dieser Beschränkung gegründet.

Versetzen wir uns aber in den allgemeinen analytischen Standpunct, so erscheint jede Wurzelgröße vieldeutig; das Rechnen mit solchen Größen wird ein Verknüpfen vieldeutiger Dinge, welches sich also in ein Combiniren ihrer einzelnen Werthe auf alle mögliche Arten auflösen, und dem gemäß eine Mannigfaltigkeit einzelner zusammengehöriger Resultate hervorbringen muß. Und in so fern entsteht denn vor allen Dingen die Frage: gelten die gewöhnlichen arithmetischen Regeln für die Rechnung mit Radicalgrößen oder Potenzen gebrochener Exponenten auch dann noch, wenn diese Größen im ganzen Umfang der Bedeutungen genommen werden, deren sie fähig sind? Es kann auf diese Frage unbedingt weder eine bejahende, noch eine verneinende Antwort gegeben werden. Die ge-

nauere Betrachtung von den einzelnen Regeln der Potenzenrechnung muß das Nähere darüber ergeben.

1. Die Arithmetik lehrt, daß Potenziirung und Wurzelausziehung an einer gegebenen Zahl in willkührlicher Ordnung vollzogen werden dürfen $\sqrt[n]{(a^m)} = (\sqrt[n]{a})^m$. Gilt dieser Satz in völliger Allgemeinheit? Man setze $a^m = a^m . [\cos (2 h \pi) + \sin (2 h \pi) . \sqrt{-1}]$ so wird

$$\sqrt[n]{(a^m)} = a^{\frac{m}{n}} \left[\cos \left(\frac{2 h \pi}{n} \right) + \sin \left(\frac{2 h \pi}{n} \right) \sqrt{-1} \right]$$

Diese Form wird n verschiedene Werthe erhalten. Man setze ebenso $a = a . [\cos (2 h \pi) + \sin (2 h \pi) \sqrt{-1}]$ so wird $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \left[\cos \left(\frac{2 h \pi}{n} \right) + \sin \left(\frac{2 h \pi}{n} \right) \sqrt{-1} \right]$ mithin

$$(\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}} \left[\cos \left(\frac{m}{n} 2 h \pi \right) + \sin \left(\frac{m}{n} 2 h \pi \right) \sqrt{-1} \right].$$

Diese lezte Form wird nur dann n verschiedene Werthe bekommen, wenn der Bruch $\frac{m}{n}$ keiner Verkleinerung fähig ist. Im gegentheiligen Falle werden ihr nur so viele Werthe bleiben, als der Factor von n, welcher sich nicht gegen m heben läßt, Einheiten enthält. Der Satz also, daß $\sqrt[n]{(a^m)} = (\sqrt[n]{a})^m$ hat nur dann unbedingte Gültigkeit, wenn die Zahlen n und m Primzahlen unter einander sind.

2. Um aus einer Wurzelgröße selbst wieder eine neue Wurzel auszuziehn, multiplicirt man ihren Wur-

zelgrad mit der neuen $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[mn]{a}$. Man drücke a durch $a\,[\cos(2h\pi) + \sin(2h\pi).\sqrt{-1})$ aus, so ist $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{2h\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2h\pi}{n}\right).\sqrt{-1}\right]$, mithin $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = a^{\frac{1}{mn}}\left[\cos\left(\frac{2h\pi}{mn}\right) + \sin\left(\frac{2h\pi}{mn}\right)\sqrt{-1}\right]$

Hingegen wird $\sqrt[mn]{a} = a^{\frac{1}{mn}}\left[\cos\left(\frac{2h\pi}{mn}\right) + \sin\left(\frac{2h\pi}{mn}\right)\sqrt{-1}\right]$. Dieser Satz ist also offenbar richtig in völliger Allgemeinheit, und alle die verschiedenen Werthe des ersten Ausdrucks stellen sich unverändert im zweyten wieder dar. Auch der umgekehrte von dem vorhergehenden Satze, $(\sqrt[mn]{a})^m = \sqrt[n]{(a^m)}$ wird als unbedingt gültig angenommen werden dürfen.

3. Die bekannte Regel, daß bey einer Potenz mit gebrochenem Exponenten Zähler und Nenner durch die nemliche Zahl multiplicirt oder dividirt werden dürfen, ohne dem Werthe des Ausdrucks zu schaden, darf also nicht allgemein angenommen werden. Es sey eine solche, in der Zähler und Nenner des Exponenten noch keinen Factor gemeinschaftlich haben $a^{\frac{m}{n}}$. Sie wird also n verschiedene Werthe in sich schließen. Multiplicirt man jezt Zähler und Nenner des Exponenten durch dieselbe Zahl, so erhält man $a^{\frac{mp}{np}}$. Dieser Ausdruck könnte auf zwey Arten ausgelegt werden. Entweder als $(\sqrt[np]{a})^{mp}$. Alsdann aber würde er nur n

verschiedene Bedeutungen erhalten. Oder als $\sqrt[np]{(a^{mp})}$. Alsdann aber würde er np verschiedene Werthe annehmen. Es gilt also die genannte Regel nur dann allgemein, wenn bey den Potenzen mit gebrochenen Exponenten die Wurzelausziehung früher als die Potenzirung, übrigens der Vorschrift des Exponenten gemäß, vollzogen wird.

4. Die vier Hauptregeln der Potenzenrechnung modificiren sich auf eine ähnliche Weise. Die Multiplication zweyer Potenzen geschieht durch Addition ihrer Exponenten $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{\frac{mq + np}{nq}}$. Nun ist der allgemeine Ausdruck von $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot \left[\cos\left(\frac{2h\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2h\pi}{n}\right) \cdot \sqrt{-1}\right]$. Ebenso der allgemeine Ausdruck von $a^{\frac{p}{q}} = \left[\cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right) + \sin\left(\frac{2k\pi}{q}\right) \cdot \sqrt{-1}\right]$ Mithin ihr Product $a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} \left[\cos\left(2\frac{(kn + hq)\pi}{nq}\right) + \sin\left(2\frac{(kn + hq)\pi}{nq}\right) \cdot \sqrt{-1}\right]$ Offenbar enthält dieser Ausdruck nq verschiedene Werthe. Eben dieselben aber giebt $a^{\frac{mq + np}{nq}}$, wenn man nur, falls Zähler und Nenner des Exponenten einen gemeinschaftlichen Factor enthalten sollten, denselben nicht heben, und die in diesem Ausdruck gefoderte Wurzelausziehung

später, als die in eben demselben verlangte Potenzirung vollziehn will. Die Regel für die Division gilt unter der nemlichen Bedingung. Die für die Erhebung zu einer neuen Potenz, $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{p} = a^{\frac{mp}{n}}$ ist richtig wenn man die Potenziirung später als die Wurzelausziehung vollzieht, oder $a^{\frac{mp}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mp}$ setzt. Die Regel endlich für die Wurzelausziehung $\sqrt[p]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)} = a^{\frac{m}{np}}$ gilt alsdann, wenn man bey der Realisirung dieses Ausdrucks die Wurzelausziehung, welche der Exponent verlangt, die lezte Operation seyn läßt, mithin $a^{\frac{m}{np}} = \sqrt[np]{(a^{m})}$ annimt, in völliger Allgemeinheit.

Auf jeden Fall also sind, wenn man Radicalgrößen im vollen Umfang ihrer möglichen Bedeutung nehmen will, Vorsichten in den Anwendungen der gewöhnlichen Rechnungsregeln zu beobachten. Wollte man gar von einer solchen Wurzelgröße nur einen einzelnen Werth, und zwar nicht gerade den positiven, welchen sie enthält, hervorheben, um ihn mit andern, auf ähnliche Weise entstandenen, zu verflechten, so reichte unser bisheriger Mechanismus nicht zu, das Resultat einer solchen Rechnung auf eine bestimmte Weise hervorzubringen. Die Ursache dieses Mangels liegt bloß an der Versäumniß einer schicklichen Bezeichnung. Es würde nicht schwer seyn, eine solche anzugeben, und durch ihre Hülfe würde sich der Algorithmus der Radicalgrößen, sowohl in unbestimmter Allgemeinheit,

als in Beziehung auf einzelne, individuelle in ihnen enthaltene Werthe auf sichere und bequeme Vorschriften zurückbringen lassen. Es ist besonders die höhere Algebra, die diese Unvollkommenheit der Arithmetik empfindet, und bey deren gründlicher Entwickelung derselben abgeholfen werden müßte.

Vierzehntes Kapitel.

Umbildung entwickelter Formen durch Substitution.

Es ist oft der Fall, wenn der Werth einer Größe durch einen entwickelten arithmetischen Ausdruck vermöge einer andern dargestellt werden soll, daß sich dieser Foderung nicht unmittelbar Genüge leisten läßt. Die erste Größe wird durch eine gewisse dritte, y durch z gegeben. Man kann sie folglich vermöge der vorhergehenden Lehren, in eine nach Potenzen von dieser dritten, z, fortschreitende Form entwickeln. Die dritte selbst wird durch die zweyte, z durch x, ausgedrückt. Man kann also auch für sie, z, eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe bekommen. Es ist alsdann also noch nothwendig die erste Reihe für y, welche Potenzen von z enthält, zu nehmen, in jedem ihrer Glieder den Werth von z, welchen die zweyte Reihe darstellt, zu substituiren, und alle Resultate in eine Summe zusammenzuziehn. Dadurch

findet sich, wie verlangt wurde, y unmittelbar nach Potenzen von x entwickelt.

Die Arbeit wird mühsam seyn, aber lediglich auf die Anwendung des polynomischen Lehrsatzes zurückkommen. Sie ist nur dann einer Zusammenziehung fähig, wenn die gegebenen Reihen so beschaffen sind, daß aus der Substitution der einen in die andre eine dritte mit regelmäßig fortschreitenden Exponenten erwächst. Wir haben vor allen Dingen zu untersuchen, wann und unter welchen Bedingungen dieser Fall eintreten wird.

Es sey also, in völliger Unbestimmtheit aller Zeichen

$$y = A z^{\alpha} + \overset{1}{A} z^{\alpha + \delta} \ldots + \overset{r}{A} z^{\alpha + r\delta}$$

und ebenso

$$z = B x^{a} + \overset{1}{B} x^{a + d} \ldots + \overset{r}{B} x^{a + rd}.$$

Verlangt man y durch x entwickelt dargestellt, so muß man die Reihe für y nehmen, in jedem ihrer Glieder statt z seinen Werth, wie ihn die zweyte Reihe darbietet, substituiren, das Resultat jeder Substitution durch den polynomischen Lehrsatz entwickeln, und alle dadurch allmälig entstandene Formen am Ende in eine Summe zusammenziehn.

Nun ist bekannt (pag 205), daß jede Potenz einer Form, wie $z = B x^{a} + B x^{a+d} \ldots$, in Absicht auf die Exponenten in den successiven Gliedern ihres berechneten Werths derselben Progression, wie die Grundform z selbst, folgen muß.

Aber die Exponenten der Anfangsglieder werden in verschiedenen Potenzen von z verschieden seyn.

Mithin wird man keinesweges im Allgemeinen behaupten dürfen, daß verschiedene Potenzen von z Reihen geben müssen, bey denen, für jedes Glied der einen, ein mit gleichem Exponenten versehenes Glied der andern gefunden werden kann, welches sich dem gemäß durch würkliche Addition mit ihm vereinigen läßt. Man substituire im Anfangsgliede der Reihe für y, statt z seinen Werth, d. h. setze in $A z^{\alpha}$ für z die gegebene Reihe. Es entsteht eine neue, die im Anfangsgliede $x^{a\alpha}$; allgemein, im h^{ten} nach ihm $x^{a\alpha + hd}$ enthalten wird. Man nehme ferner unbestimmt das r^{te} Glied der Reihe für y, $= \overset{r}{A} z^{\alpha + r\delta}$, und unterziehe es der nemlichen Substitution. Es entsteht aus ihr eine neue Reihe, die mit $x^{\alpha a + ar\delta}$ anheben, und durch Exponenten, die allmälig immer um d größer werden, fortlaufen wird. Sollen die Glieder der lezten Reihe mit denen der ersten in würkliche Vereinigung treten, so muß es unter den Gliedern der ersten irgend eines, unbestimmt das h^{te}, geben, welches mit dem Anfangsgliede der lezten gleichen Exponenten besitzt. Denn da übrigens die Progression der Exponenten in beyden Reihen dieselbe ist, so werden alsdann die nachfolgenden Glieder in ihnen durchaus gleiche, im gegentheiligen Falle aber durchaus verschiedene Exponenten besitzen, mithin alsdann an gar keine eigentliche Vereinigung der beyden Reihen zu denken seyn. Es muß also, falls man eine solche verlangt, möglich seyn $a\alpha + hd$

$= a\alpha + ar\delta$ zu setzen, so daß h irgend eine ganze positive Zahl seyn kann; d. h. es muß $\frac{ar\delta}{\alpha}$ irgend eine positive Zahl, oder noch kürzer, da r eine unbestimmte ganze Zahl bedeutet, es muß $\frac{\alpha\delta}{d}$ irgend eine ganze positive Zahl mithin, wenn wir unter m eine solche verstehn, es muß $\frac{a\delta}{d} = m$, oder $d = \frac{a\delta}{m}$ seyn.

Es wird also nur der Fall, bey der Entwicklung durch Substitution, einer Zusammenziehung des Resultats, und einer Darstellung desselben durch eine Reihe, worin die Exponenten eine arithmetische Progression beobachten, fähig seyn, bey welchem die beyden gegebenen Reihen, falls d, α, δ, willkührliche Größen, m aber eine ganze positive Zahl bedeutet, die folgende Form haben.

$$y = Az^{\alpha} + \overset{1}{A}z^{\alpha+\delta} \,..\, + \overset{r}{A}z^{\alpha+r\delta} + \,..$$

$$z = Bx^{a} + \overset{1}{B}x^{a+\frac{a}{m}\delta} \,..\, \overset{r}{B}x^{a+r\frac{a}{m}\delta} + \,..$$

Alsdann wird aus der Substitution eine neue Reihe für y entstehn, die im Anfangsgliede $a\alpha$ enthält, und in welcher die Exponenten regelmäßig um $\frac{a}{m}\delta$ zunehmen.

In dieser Allgemeinheit der Formen aber würde die würkliche Berechnung der Coefficienten wenig Brauchbarkeit und Interesse gewähren. Wir wollen also zu etwas particuläreren Fällen fortschreiten.

Soll, bey der Substitution des Werths von x, in die Reihe für y, ein regelmäßiges Zusammenfließen der Reihen, die aus den successiven Gliedern von y entstehn, erfolgen, so daß das Anfangsglied der zweyten sich sogleich mit dem ersten Gliede nach dem anfänglichen in der ersten, allgemein, das Anfangsglied der r^{ten} Reihe mit dem r^{ten} Gliede der ersten durch würkliche Addition vereinigen läßt, so muß $r d = a r \delta$, mithin $d = a \delta$ seyn, mithin die beyden gegebenen Reihen folgende Form besitzen

$$y = A z^{\alpha} + \overset{1}{A} z^{\alpha + \delta} \ldots + \overset{r}{A} z^{\alpha + r\delta}$$

$$z = B x^{a} + \overset{1}{B} x^{a + a\delta} \ldots \overset{r}{B} x^{a + ar\delta}$$

Wir wollen bey diesem Falle verweilen, um die Coefficientenbestimmung für das Resultat, ganz im Allgemeinen, auf ihre Regel zurückzubringen.

Hier wird aber, um Weitläuftigkeit zu vermeiden, eine Abkürzung der Bezeichnung nothwendig. Wenn eine Reihe, wie jezt die für z, zu successiv verschiedenen Potenzen erhoben werden soll, so ist es die kürzeste Art, nicht allein ihre Coefficienten, sondern auch die aller ihrer Potenzen durch das nemliche Zeichen, etwa Z, anzudeuten. Ein übergeschriebener Index kann die Zahl des Coefficienten; ein auf der linken Seite aufwärts beygesetzter Exponent den Grad der Potenz welcher der Coefficient gehören soll, bestimmen. Die ganze Bezeichnung ist der für Binomialcoefficienten vollkommnen analog. So würde also

$$z^{1} = {}^{1}Z x^{a} + {}^{1}\overset{1}{Z} x^{a + a\delta} \ldots + {}^{1}\overset{r}{Z} x^{a + ra\delta}$$

und allgemein

$$z^{m} = {}^{m}Z x^{am} + {}^{m}\overset{1}{Z} x^{am + a\delta} \ldots + {}^{m}\overset{r}{Z} x^{am + ar\delta} \ldots$$

Mit dieser Bezeichnung ausgerüstet, werden wir leicht das Resultat der ganzen Substitution in völliger Allgemeinheit darstellen können.

Die resultirende Reihe beginnt, wie wir wissen, mit $x^{a\alpha}$, und hat in ihrem r^{ten} Gliede $x^{a\alpha + ra\delta}$. Fragen wir also nach dem Coefficienten, welchen dieses r^{te} Glied bekommen wird.

Man setzt allmälig bey der Substitution in jedes Glied des Werths von y, für die Potenz von z, welche es enthält, die gebührende Reihe. Solange die Zahl eines solchen Gliedes kleiner ist als r, hebt die aus ihm entspringende Reihe mit einem Gliede an, welches einen niedrigeren Exponenten als $a\alpha + ra\delta$ enthält, muß also zu folgenden Gliedern fortgesetzt werden, bis sich in ihr ein Glied mit diesem Exponenten zeigt, gibt also gewiß einen Theil her, welcher in $x^{a\alpha + ra\delta}$ multiplicirt ist. Sobald aber die Zahl des Gliedes in dem Werthe von y größer ist als r, hebt die aus ihm durch Substitution entspringende Reihe mit einer höheren Potenz von x als die vorliegende an; es kann also aus diesen Gliedern nichts gezogen werden, was in die jezt gesuchte Summe gehörte. So wird also der Coefficient zu $x^{a\alpha + ra\delta}$ in Resultate der Substitution eine zusammengesetzte Größe, deren k^{ter} Theil entsteht, wenn man das k^{te} Glied der Reihe für y, d. h. $\overset{k}{A} z^{\alpha + k\delta}$, nimt; in ihm für z seinen Werth, d. h. die Potenz des Grades $\alpha + k\delta$ von der Reihe $z = Bx^{a} + \overset{1}{B} x^{a + a\delta}$,.

setzt, und dasjenige Glied dieser Entwicklung, in welchem $x^{a\alpha + ra\delta}$ enthalten ist, heraushebt.

Nun fängt diese, zulezt gefoderte Potenz der Reihe z mit $x^{a\alpha + k\alpha\delta}$ an; es ist also das Glied von ihr, dessen Zahl $r - k$ ist, welches man aus ihr zu nehmen haben wird, weil die in ihm vorkommende Potenz $x^{a\alpha + ka\delta + (r-k)a\delta} = x^{a\alpha + ka\delta}$ seyn wird. Sein Coefficient ist, nach unsrer abgekürzten Bezeichnung $^{\alpha + k\delta}{}_{\alpha + k\delta}\overset{r-k}{Z}$; er also, mit dem Factor multiplizirt, welchen diese Potenz von z, woraus er hervorgehoben wurde, in der Reihe für y führte, d. h. mit $\overset{k}{A}$, gibt den k^{ten} Theil des Coefficienten zu $x^{a\alpha + ra\delta}$ welcher Coefficient also vollständig durch $o..r\Sigma(A^{k}.\ ^{\alpha + k\delta}\overset{r-k}{Z})$ ausgedrückt werden kann.

Es würde leicht seyn, diesen allgemeinen Ausdruck in einen combinatorischen umzusetzen, da in ihm nur einzelne Coefficienten aus bestimmten Potenzen der Reihe, wodurch der Werth der Größe z gegeben ist, verlangt werden. Da indessen in dieser Allgemeinheit keine Zusammenziehung des ganzen Ausdrucks möglich ist, so hat eine solche fernere Zurückführung wenig Interesse. Soviel aber mag im Allgemeinen abstrahirt werden, daß jeder Coefficient der Reihe, welche entspringt, wenn man in

$$y = \overset{1}{A} z^{\alpha} + \overset{2}{A} z^{\alpha + \delta} .. + \overset{r}{A} z^{\alpha + r\delta} + ..$$

für die Größe z den Werth

$$z = Z x^{a} + \overset{1}{Z} x^{a + a\delta} .. + \overset{r}{Z} x^{a + ra\delta} + ..$$

substituirt, zu seiner Bildung gerade so viele von den Coefficienten der beyden gegebenen Reihen gebraucht, als sein eigener Index Einheiten enthält. Der r^{te} Coefficient dieser Reihe ist, wie eben gefunden worden $\overset{k}{{}^{0\cdots r}}\Sigma(\overset{k}{A}\,{}^{\alpha}{+}^{k\delta}\overset{r-k}{Z})$. Offenbar also, wenn wenn in ihm, wie er verlangt, für k alle Werthe von o bis r gesetzt werden, gibt er erstlich in seinen einzelnen Theilen alle Coefficienten der ersten Reihe von A bis $\overset{r}{A}$. Er fodert aber außerdem, in dem zweyten Factor $\alpha + k\delta\overset{r-k}{Z}$, von gewissen Potenzen der Reihe für z, einzelne Coefficienten, und zwar von einer unter ihnen den r^{ten}, von den andern hingegen Coefficienten geringerer Zahl. Nun aber ist es aus dem Vorhergehenden bekannt, (pag 213) daß, welches auch der Exponent der Potenz seyn möge, worauf eine beliebige Reihe erhoben werden soll, jeder Coefficient der Potenz nur so viele von den ersten der Grundreihe zu seiner Zusammensetzung fodert, als seine eigne Zahl Einheiten enthält. Es mag also der Ausdruck $\alpha + k\delta\overset{r-k}{Z}$, durch Specialisirung von k, eine Bedeutung annehmen, welche man will, so wird doch allemal Etwas in ihm gefodert, was, als Coefficient einer Potenz von der Reihe für z, dessen Zahl nicht über r hinausgehn kann, auch nur aus den ersten r Coefficienten eben dieser Reihe für z zusammengesetzt seyn wird. Es ist also offenbar, daß in dem ganzen Ausdrucke des r^{ten} Coefficienten der

Reihe, welche aus der Substitution entspringt, nur soviele von denen der beyden gegebenen Reihen vorkommen, als seine Zahl Einheiten in sich faßt. Will man, noch etwas genauer in die Bildung dieses Coefficienten eingehend, fragen, auf welche Weise in ihm die r^{ten} Coefficienten der beyden gegebenen Reihen, vorzugsweise betrachtet, vorkommen, so kann leicht die Antwort gefunden werden: beyde nur auf die erste Potenz erhoben. Von der Reihe für y ergibt sich dies auf den ersten Anblick aus der Formel $\overset{k}{o}\,..\,r\Sigma(\overset{k}{A}.\,{}^{\alpha+k\delta}\overset{r-k}{Z})$, denn jeder ihrer Coefficienten wird nur einzeln, mit einem Factor, der aus der zweyten Reihe für z genommen ist, multiplicirt, gesetzt. Vollends, wenn $k = r$, wie hier angenommen werden muß, wird der Factor neben $\overset{r}{A}$ einfach genug ${}^{\alpha+r\delta}Z = Z^{\alpha+r\delta}$. Es erscheint also der r^{te} Coefficient der ersten Reihe nur mit einer bestimmten Potenz vom Anfangscoefficienten der zweyten multiplicirt. Von der Reihe für z ist das Nemliche nicht schwer zu beweisen. Die Formel enthält, man setze für k, was man will, nur einen Theil, in welchem der r^{te} Coefficient der Reihe für z vorkommen kann. Es ist der allererste, für $k = 0$, wo sie sich in $A.\,{}^{a}\overset{r}{Z}$, verwandelt. Wenn man aber eine Reihe wie $z = Zx^{a} + \overset{1}{Z}x^{a+a\delta}\,..\, + \overset{r}{Z}x^{a+ra\delta}$, auf eine beliebige Potenz, hier des Grades α, erhebt, und deren r^{tes} Glied verlangt, so gibt es in der Reihe der Producte, woraus sich dessen Coefficient

zusammensetzt, nur eines, in welchem $\overset{r}{Z}$ vorkommt und zwar ist dasselbe $\alpha Z^{\alpha-1}.\overset{r}{Z}$. Es ist also $\alpha . A . Z^{\alpha-1} . \overset{r}{Z}$ der einzige Theil im r^ten^ Coefficienten der aus dem Substituiren entsprungenen Reihe, in welchem der r^te^ Coefficient der zweyten von den für die Substitution gegebenen Reihen vorkommt. Wir werden von dieser Bemerkung im folgenden Capitel für eine sehr wichtige Untersuchung Gebrauch machen.

Wenn es darauf ankommt, die aus der Substitution entspringende Reihe independent entwickelt zu erhalten, so ist unfehlbar der vorhin betretene Weg der kürzeste und bequemste. Sollte man aber ihre einzelnen Glieder allmälig berechnen, und also die Coefficienten derselben recurrirend ableiten, so ließe sich ein einfacheres Verfahren an die Hand geben, wobey jedesmal nichts weiter als der binomische Lehrsatz gebraucht werden müßte. Um in der Reihe

$$y = A z^{\alpha} + \overset{1}{A} z^{\alpha+\delta} \ldots + \overset{r}{A} z^{\alpha+r\delta} \ldots$$

für die Größe z die Reihe

$$z = B x^{a} + \overset{1}{B} x^{a+d} + \ldots \overset{r}{B} x^{a+rd} \ldots$$

zu substituiren, nehme man den Inbegriff aller folgenden Glieder in der zweyten Reihe zuerst als eine einzige neue Hauptgröße an, setze also $z = B x^{a} + u$. Diese Substitution, sogleich durch den binomischen Lehrsatz ausführbar, wird eine neue Form hervorbringen, die nach Potenzen von u fortschreitend geordnet werden mag. In ihr setze man wieder für u eine

zweytheilige Größe, deren erster Theil das würkliche erste Glied der Reihe, die durch u bezeichnet ist, seyn mag, der zweyte hingegen den Inbegriff aller folgenden andeute $u = Bx^{a+d} + v$. Auf diesem Wege fahre man fort, die Glieder der Reihe für z, eines nach dem andern, hervorzuziehn, und in die Entwicklung eintreten zu lassen. Die vollständige Ableitung dieses Verfahrens würde aber noch viel weitläuftiger als die des ersten, ausfallen müssen, und eine wahre, arithmetische, Recursion zwischen den Coefficienten des Resultats würde dennoch nicht gefunden werden, sondern statt ihrer eine bloß combinatorische zwischen den einzelnen Formen, wodurch sich jene Cofficienten andeuten, solange man unbestimmte Zeichen gebraucht. Es mag also genug seyn, nur den Fundamentalsatz des ganzen Verfahrens, welches im Grunde der binomische Lehrsatz ist, zu der gegenwärti. Absicht auf die bequemste Gestalt zurückzubringen.

Man soll in einer Reihe, die nach Potenzen einer gewissen Hauptgröße fortgeht, statt dieser Hauptgröße, eine andre, zweytheilige substituiren, und das Resultat, nach den Potenzen des zweyten Theils in der lezteren angeordnet, darstellen; in der Reihe $y = Az^{\alpha} + \overset{1}{A}z^{\alpha+\delta} \ldots + \overset{r}{A}z^{\alpha+r\delta}$, statt z die Größe $Bx^{a} + u$. Es ist in diesem Falle am bequemsten, wenn man für den Anfang den ersten Theil des zweytheiligen Werths, welcher statt der Hauptgröße gesetzt werden soll, durch das Zeichen dieser Größe

selbst andeutet, mithin statt für z zu setzen $A x^a + u$, anfangs dafür $z + u$ substituirt. Es versteht sich, daß alsdann nachher an die Stelle der Zeichens z sein eigentlicher Werth, $A x^a$, gesetzt werden muß.

Man nehme also die gegebene Form $y = A z^\alpha$ $\overset{1}{A} z^{\alpha + \delta} \,.. + \overset{r}{A} z^{\alpha + r\delta} \,..$ und setze in ihr an den Platz von z, die Größe $z + u$. Jedes ihrer Glieder entwickelt sich in eine nach Potenzen von u fortschreitende Reihe, und alle diese Reihen, gleichhohe Glieder von ihnen in eine Summe zusammengezogen, stellen das Gesuchte dar. Nun aber ist es aus dem binomischen Lehrsatze bekannt, daß die successiven Glieder der entwickelten Potenz eines Binomiums, wie $(z + u)^m$, in einer bestimmten Beziehung stehn, so daß es leicht ist, wenn man will, jedes folgende als abgeleitet aus dem vorhergehenden zu betrachten. Das r^{te} Glied jener Größe wird $\frac{m.(m-1)\,..\,(m-r+1)}{1.2\,...\,r} z^{m-r} u^r$; das nächste folgende $r + 1^{te}$, $\frac{m.(m-1)\,..\,(m-r+1).(m-r)}{1.2\,..\,r.\,r+1} z^{m-(r+1)} u^{r+1}$ seyn. Sieht man die Potenzen von u als Hauptgrößen, das Uebrige als deren Coefficienten an, so ergibt sich die Regel: man multiplicire den Coefficienten des r^{ten} Gliedes mit dem Grade der Potenz von z, welche er enthält, $(m - r)$, verringere diese Potenz selbst im Grade um eine Einheit, $z^{m-(r+1)}$, und dividire durch die Zahl des verlangten Gliedes, $r + 1$, so wird man den dieses $r + 1^{ten}$ Gliedes erhalten. Sollten mehrere Potenzen von $z + u$,

als Theile eines zusammengesetzten Ausdrucks vorhanden seyn, so gibt die Anwendung der eben ausgesprochenen Regel auf jede von ihnen nach der Reihe, die gleichhohen Glieder, welche, in die nemliche Potenz von u multiplicirt, in der That in eine Summe zusammengezogen werden müssen. Man setze also die gegebene Reihe selbst, in welcher, statt z, substituirt werden soll, z + u; sie ist das Anfangsglied des Resultats; man leite aus ihr eine neue Form ab, jedes Glied mit seinem Exponenten multiplicirend, und dann diesen, sofern er Exponent bleibt, um eine Einheit verringernd; man verfahre mit dieser Form wieder eben so, um aus ihr eine folgende zu erzeugen, und bilde überhaupt solcher, durch den nemlichen Mechanismus successiv aus einander abgeleiteter Formen soviele, als man Glieder für das Resultat der Substitution verlangt. Man füge ihnen nach der Ordnung die successiven Potenzen von u, durch ihre eignen Permutationszahlen dividirt, als Factoren bey, und man erhält das Resultat der Substitution in entwickelter Gestalt. So erhält nun im Zeichen, die Rechnung folgendes Schema

$$\underline{Az^{\alpha} + \overset{1}{A}z^{\alpha+\delta} + \overset{2}{A}z^{\alpha+2\delta} \ldots + \overset{r}{A}z^{\alpha+r\delta} \ldots}$$

$$\underline{+ [\alpha Az^{\alpha-1} + (\alpha+\delta)\overset{1}{A}z^{\alpha+\delta-1} \ldots + (\alpha+r\delta)\overset{r}{A}z^{\alpha+r\delta-1}]u}$$

$$+ [\alpha(\alpha-1)Az^{\alpha-2} \ldots + (\alpha+r\delta).(\alpha+r\delta-1)\overset{r}{A}z^{\alpha+r\delta-2}]\frac{u^2}{1.2}$$

u. s. w. Wir wollen dieses Verfahren durch eine eigenthümliche Bezeichnung festhalten. Eine Form die nach

Potenzen von z fortschreitet, mag durch F(z) angedeutet werden. Die aus ihr abgeleitete, welche dadurch entsteht, daß man jedes Glied in ihr mit seinem Exponenten multiplicirt, und den Grad der Potenz um eine Einheit verringert, durch $F^1(z)$; die daraus auf die nemliche Weise abgeleitete durch $F^2(z)$ u. s. w. Alsdann wird sich die eben ausgesprochene Regel folgendermaßen in Zeichen ausdrücken lassen.

$$F(z+u) = F^1(z) + F^2(z).u + \frac{F^3(z).u^2}{1.2} + \frac{F(z)u^3}{1.2.3} + \ldots$$

Eigentlich gehört diese Untersuchung in einen besonderen Theil der Analysis, welcher die Benennung der Differenzenrechnung führt, und wo sie, unter veränderten Benennungen und Bezeichnungen, in ihrem ganzen Umfange ausgeführt wird. Sofern die Form in welche für die Hauptgröße eine neue Form, bestehe diese auch nur in einer zweytheiligen Größe, substituirt wird, selbst schon entwickelt ist, hat freylich die Betrachtung keinen großen Umfang, sondern kommt im Wesentlichen auf den vorhin dargestellten Satz zurück. Aber wenn man verlangt, daß in einem Ausdrucke, der noch unentwickelt ist, für die Hauptgröße eine andre zweytheilige gesetzt, und nun das Resultat in eine Reihe, die nach Potenzen des zweyten Theils jener substituirten zweyten Größe fortgeht, entwickelt dargestellt werden soll, so bietet sich ein großes Feld neuer Betrachtungen dar. Denn nun entsteht die Frage, ob nicht der anfänglich gegebene Ausdruck selbst unentwickelt bleiben kann,

so daß demungeachtet die Substitution in ihm vollzogen werde, und die gesuchte, nach Potenzen der durch die Substitution herbeygeführten neuen Hauptgröße fortschreitende Reihe hervorgehe, sey es auch, daß die Cofficienten derselben als unentwickelte Ausdrücke erscheinen. Es ist hier nicht unsre Absicht, diese Untersuchungen, welche einem folgenden Abschnitte der Analysis vorbehalten bleiben, ferner auszuführen. Indessen mag, theils als einzelnes Beyspiel, theils als ein Satz, welcher zur Abkürzung einer gleich nachher zu führenden Untersuchung behülflich seyn kann, nur ein Theorem aus jener Lehre, und zwar das fundamentale, hier noch eine Stelle finden.

Es sey eine Form, die zu einer vorgeschriebenen Potenz erst erhoben werden soll, gegeben.

$$F(z) = Z z^{\alpha} + \overset{1}{Z} z^{\alpha+\delta} \ldots \overset{r}{Z} z^{\alpha+r\delta} \ldots$$

mithin das zu berechnende, angedeutet,

$$[F(z)]^n = {}^nZ z^{n\alpha} + {}^n\overset{1}{Z} z^{n\alpha+\delta} \ldots + {}^n\overset{r}{Z} z^{n\alpha+r\delta} \ldots$$

Es wird verlangt, die Entwicklung der Substitution von $z + u$ für z in der Größe $[F(z)]^n$ zu machen, ohne sie selbst in entwickelter Gestalt vorher schon berechnet zu haben.

Man kann offenbar schon in der gegebenen Form selbst, $F(z)$ die Substitution vollbringen. Dadurch wird aus ihr, vermöge des vorhin dargestellten Mechanismus, eine Reihe welche nach Potenzen von u fortschreitet,

$$F(z) + F^1(z).u + \frac{F^2(z).u^2}{1.2} + \ldots \frac{F^r(z)\,u^r}{1.2\ldots r} \ldots$$

Man hat also nur noch diese Reihe zu der verlangten $n$ten Potenz zu erheben, welches vermöge des bekannten polynomischen Lehrsatzes geschehn kann, und das Resultat der Entwicklung wird in gesetzmäßiger Gestalt vorhanden seyn.

Man hätte aber auch die gefoderte Potenz von $F(z)$ erst berechnen, und dann, in jedem Gliede der dadurch entstandenen Reihe, für z den Werth $z+u$ setzen können. Beyde Resultate müssen nothwendig identisch seyn, gleichhohe Glieder in beyden also die nemlichen Resultate gewähren. So wird z. E., was zu unsern nächsten Absichten hinreicht, das erste Glied der resultirenden Form, auf dem ersten Wege gesucht, wo also von $\left[F(z) + F^{1}(z).u + \frac{F^{2}(z).u^{2}}{1.2}..\right]^{n}$ das erste Glied nach dem anfänglichen genommen werden muß, $n.[F(z)]^{n-1}.F^{1}(z).u$. Hingegen eben dieses Glied, auf dem zweyten Wege gefunden, wird $F^{1}[F(z)]^{n}.u$. Es folgt also daraus daß $n[F(z)]^{n-1}.F^{1}(z) = F[F^{1}(z)]^{n}$. Ein Lehrsatz der folgendermaßen ausgedrückt werden kann.

Es sey eine beliebige Reihe

$$F(z) = Zz^{\alpha} + \overset{1}{Z}z^{\alpha+\delta} + \overset{2}{Z}z^{\alpha+2\delta}.. + \overset{r}{Z}z^{\alpha+r\delta}..$$

vorhanden. Es sey ihre n^{te} Potenz

$$[F(z)]^{n} = {}^{n}Zz^{n\alpha} + {}^{n}\overset{1}{Z}z^{n\alpha+\delta} + .. + {}^{n}\overset{r}{Z}z^{n\alpha+r\delta}..$$

und ebenso ihre $(n-1)_{te}$

$$[F(z)]^{n-1} = {}^{n-1}Zz^{(n-1)\alpha} + {}^{n-1}\overset{1}{Z}z^{(n-1)\alpha+\delta} + {}^{n-1}\overset{2}{Z}z^{(n-1)\alpha+2\delta}.. + {}^{n-1}\overset{r}{Z}z^{(n-1)\alpha+r\delta},$$

Man nehme von der Reihe selbst, die abgeleitete Form, nmal $nF^{1}(z) = n\alpha Zz^{\alpha-1} + (\alpha+\delta).\overset{1}{Z}z^{\alpha+\delta-1} .. + n(\alpha + r\delta).\overset{r}{Z}z^{\alpha+r\delta-1}$
Ihr Product, mit der $(n-1)^{ten}$ Potenz der Reihe selbst multiplicirt, muß genau die abgeleitete Form hervorbringen, welche aus der entwickelten n^{ten} Potenz der Reihe, selbst gezogen werden kann, d. h.

$$n\alpha.{}^{n}Zz^{n\alpha-1} + (n\alpha+\delta){}^{n}\overset{1}{Z}z^{n\alpha+\delta-1} .. + (n\alpha + r\delta){}^{n}\overset{r}{Z}z^{n\alpha+r\delta-1}$$

Es wird also aus den beyden Factoren

$$[F(z)]^{n-1} = {}^{n-1}Zz^{(n-1)\alpha} + .. {}^{n-1}\overset{r}{Z}z^{(n-1)\alpha+r\delta}$$

$$n.F1(z) = n, \alpha Zz^{\alpha-1} + .. n(\alpha + r\delta)\overset{r}{Z}z^{\alpha+r\delta-1}$$

das Product $= n\alpha.{}^{n}Zz^{n\alpha-1} + ..(n\alpha + r\delta).{}^{n}\overset{r}{Z}z^{n\alpha+r\delta-1}$
Mithin, wenn wir unbestimmt den r^{ten} Coefficienten des Products aus den Factoren wirklich berechnen, und dem gleichhohen seines schon bekannten Werthes gleichsetzen,

$$n[(\alpha+r\delta).\overset{r}{Z}.{}^{n-1}Z + [\alpha+(r-1)\delta].\overset{r-1}{Z}.{}^{n-1}\overset{1}{Z} + .. [\alpha+(r-k)\delta]\overset{r-k}{Z}.{}^{n-1}\overset{k}{Z} .. + \alpha Z.{}^{n-1}\overset{r}{Z}] = (n\alpha + r\delta){}^{n}\overset{r}{Z}$$

Eine recurrirende Beziehung zwischen den r ersten Coefficienten von der ersten und $(n-1)^{ten}$ Potenz einer beliebige angenommenen Reihe und dem r^{ten} Coefficienten ihrer nähsthöheren n^{ten} Potenz, die sehr leicht folgendermaßen in Worten ausgesprochen werden könnte. Man multiplicire eine beliebige

Potenz einer willkührlich genommenen Reihe mit der Reihe selbst, nachdem in dieser die Coefficienten mit den Exponenten der in den zugehörigen Gliedern vorkommenden Potenzen vervielfacht worden sind; das Product gibt eine Reihe, welche die nächsthöhere Potenz der angenommenen darstellen wird, nur daß jedes Glied dieser Potenz mit seinem eignen Exponenten multiplicirt, und durch den Grad der Potenz selbst dividirt, und insofern verändert, vermöge jenes Products zum Vorschein kommt.

Man kann eben diesen Satz noch etwas allgemeiner ausdrücken. Es sey die anfangs angenommene Form, die wir vorhin durch $Zz^{\alpha} + \overset{1}{Z}z^{\alpha+\delta} .. + \overset{r}{Z}z^{\alpha+r\delta} ..$ bezeichneten, selbst schon von irgend einer andern, die wir hier nicht näher zu bezeichnen brauchen, deren Coefficienten aber $\mathfrak{Z}$, $\overset{1}{\mathfrak{Z}}$, $\overset{2}{\mathfrak{Z}}$ u. s. w. seyn mögen, eine Potenz des Grades f. Alsdann wird man sie und ihre Coefficienten durch ${}^{f}\mathfrak{Z}z^{\alpha} + {}^{f}\overset{1}{\mathfrak{Z}}{}^{\alpha+\delta} .. + {}^{f}\overset{r}{\mathfrak{Z}}z^{\alpha+r\delta} ..$ andeuten können. Die Reihe aber, welche von ihr die $n-1^{te}$ Potenz ist, wird von jener ersten die $(n-1)f^{te}$ Potenz seyn. Brauchen wir für $(n-1)f$ das Zeichen g, woraus sogleich $nf = f + g$ folgt, so wird die n^{te} Potenz derselben Reihe nun die $(f+g)^{te}$ der neu angenommenen. Und nun kann unser voriger Satz so ausgedrückt werden.

Es sey eine Reihe vorhanden, welche als beliebige, schon berechnete Potenz einer andern gegeben werde

$f\mathfrak{Z}z^{\alpha} + f\overset{1}{\mathfrak{Z}}z^{\alpha+\delta} .. + f\overset{r}{\mathfrak{Z}}z^{\alpha+r\delta} ..$

Ebenso eine zweyte, welche als eine andre, willkührliche Potenz eben der Grundform gegeben seyn mag

$$ {}^{g}Z z^{\alpha \cdot \frac{g}{f}} + {}^{g}\overset{1}{Z} z^{\alpha \cdot \frac{g}{f} + \delta} \ldots {}^{g}\overset{r}{Z} z^{\alpha \cdot \frac{g}{f} + r\delta} \ldots $$

Man multiplicire in der ersten von beyden Reihen jedes Glied mit dem Exponenten seiner Potenz, und bilde alsdann ein Product aus ihr in die zweyte Reihe. Was herauskommt, wird eine dritte Reihe seyn, welche mit der Potenz des Grades $f + g$, von der nemlichen Grundform, nur daß jedes Glied derselben mit seinem eignen Exponenten multiplicirt, und durch $f + g$ dividirt werde, völlig zusammenfällt. In Zeichen:

$$ (\alpha + r\delta) . {}^{f}\overset{r}{Z} . {}^{g}Z + [\alpha + (r-1)\delta]\, {}^{f}\overset{r-1}{Z}\, {}^{g}\overset{1}{Z} \ldots + [\alpha + (r-k)\delta]\, {}^{f}\overset{r-k}{Z} . {}^{g}\overset{k}{Z} \ldots + \alpha\, {}^{f}Z\, {}^{g}\overset{r}{Z} = \frac{[\alpha(f+g) + frd]}{f+g} . {}^{f+g}\overset{3}{Z}. $$

Der Gebrauch dieser Formel wird sich im nächsten Capitel zeigen.

Funfzehntes Kapitel.

Von der Umkehrung der Reihen.

Wenn eine Größe, y, durch irgend einen arithmetischen Ausdruck aus einer andern, x, zusammengesetzt gegeben ist, so läßt sich der Werth von ihr in den mehrsten Fällen durch eine Reihe von der bekannten Gestalt, $y = A x^{a} + \overset{1}{A} x^{a+d} + \overset{2}{A} x^{a+2d} \ldots + \overset{r}{A} x^{a+rd}$ darstellen. Aber jede gegebene Beziehung zwischen zwey

Größen muß es überhaupt möglich machen, die eine von ihnen durch die andre auszudrücken. Es muß also auch die Foderung befriedigt werden können: die Gestalt der anfänglich gegebenen Gleichung so umzuändern, daß die Größe, welche vorher diente, die andre auszudrücken, nun selbst diejenige wird, deren Werth aus jener anderen abgeleitet werden kann, daß also, in Zeichen, x vermöge eines bestimmten arithmetischen Ausdrucks durch y gegeben erscheint. Man nennt den Inbegriff der Operationen, welche mit der zuerst angenommene Gleichung vollzogen werden müssen, um ihr jene zulezt genannte Gestalt zu ertheilen, **Umkehrung** der Gleichung. Diese Operation ist von der höchsten Wichtigkeit, da unsre Kenntniß von dem Zusammenhange zweyer Größen nur dann vollständig ist, wenn wir jede von ihnen aus der andern abzuleiten vermögen. Aber sie läßt sich auf eine directe Weise, an geschlossenen arithmetischen Ausdrücken, in sehr wenigen Fällen vollziehen. Es wird also schon sehr viel gewonnen seyn, wenn sie auch nur bey Entwicklungen in Reihen unbedingt vollführt werden kann. Wir wollen mithin die folgende Aufgabe zur Betrachtung ziehn: der Werth einer von zwey zusammengehörigen Hauptgrößen ist durch eine entwickelte Form, die nach Potenzen der andern fortgeht, gegeben,

$y = Ax^{a} + \overset{1}{A}x^{a+d} .. + \overset{r}{A}x^{a+rd} + ..$ Man frägt ob es nicht möglich ist, aus dieser Reihe eine andre, von ähnlicher Gestalt, abzuleiten, welche den Werth

der zweyten Hauptgröße, in einer nach Potenzen der ersten fortgehenden Form,

$x = By^{\alpha} + \overset{1}{B}y^{\alpha+\delta} .. \overset{r}{B}y^{\alpha+r\delta}$ darstellt, und nach welchem Gesetze Exponenten und Coefficienten dieser neuen Reihe, welche die umgekehrte der vorigen heißen soll, gebildet werden müssen.

Wenn es in der That einen solchen Ausdruck für x gibt, so ist die Bedingung, welche er erfüllen muß, leicht anzugeben. Man substituire in der ersten würklich gegebenen Reihe, $y = Ax^{a} + Ax^{a+d} .. + \overset{r}{A}x^{a+rd} ..$, für x jene Form, welche den Werth dieser Größe darstellen soll. Das Resultat der ganzen Substitution wird ein Inbegriff mehrerer Reihen werden, von denen jede nach Potenzen von y fortschreitet. Nun aber ist angenommen worden, daß die Summe aller der Glieder, aus denen die Form besteht, in welche man substituirt, y selbst seyn soll. Es muß also jener Inbegriff von Reihen, von denen jede einzelne nach Potenzen von y fortschreitet, mit y selbst identisch werden. Dies ist nicht anders möglich, als so, daß wenn man jene Reihen in eine Summe würklich zusammenzieht, in dieser Summe ein Glied vorkommt, welches y ist, während jedes der andere Glieder, welche Potenz von y es auch enthalten mag, zu seinem Coefficienten o bekommt. Nur alsdann, wenn die zweyte, für x angenommene Reihe dieser Foderung Genüge leistet, darf sie als bestehend neben der ersten, für y bestimmt gegebenen, und folglich als die umgekehrte von dieser angesehen werden. Aus eben dieser Bedingung läßt

sich ableiten, wie eine Reihe, welche von einer andern die umgekehrte ist, von dieser abhängt, und aus ihr abgeleitet werden kann. Bey einer völlig unbekannten Reihe sind zwey Momente in Rücksicht zu nehmen. Zuerst ihre Form, welche durch die Progression, worin sich die Exponenten der Potenzen in ihren successiven Gliedern befinden, bestimmt wird. Zweytens ihre Coefficienten, und das Gesetz, nach welchem sie sich erzeugen. Wir wollen also, um die Untersuchung auszuführen, zuerst nur fragen, ob sich für die umgekehrte Reihe, wenn man sie vorläufig als gefunden fingiren wollte, doch wenigstens immer eine bestimmte Form, oder vielleicht mehr als eine Form festsetzen läßt, so daß würklich, wenn man nur nachher die Coefficienten gehörig einrichtet, jene Bedingung, welcher die umgekehrte Reihe durchaus Genüge leisten soll, unfehlbar befriedigt werden kann.

Es ist aber aus dem vorigen Kapitel bekannt, daß, nur dann die Reihen, welche aus einer Form wie die gegebene

$$y = A x^{\alpha} + \overset{1}{A} x^{\alpha + \delta} \,.\,.\, + \overset{r}{A} x^{\alpha + r\delta}$$

entspringen, wenn man in ihr für x die neue

$$x = B y^{a} + \overset{1}{B} y^{a + d} \,.\,.\, + \overset{r}{B} y^{a + rd}$$

substituirt, sich würklich vereinigen, wenn $d = \frac{a\delta}{m}$, unter m eine beliebige ganze Zahl verstanden, und daß in jedem andern Falle jede der genannten Reihen ihre Glieder in die Summe bringt, ohne daß zu

irgend einem Gliede der einen sich ein gleichhohes der andern gesellte. Nun aber ist unsre Bedingung, daß in der Summe nur ein Glied seyn soll, welches $= y$ wird, die andern alle aber einzeln o zum Coefficienten haben müssen. Aber wofern auch nur von irgend einer Potenz einer gewissen Reihe, wie hier die für x fingirte, jedes einzelne Glied für sich $= o$ werden sollte, so müßte die Reihe selbst, mithin jedes einzelne Glied schon $= o$ gewesen seyn. Aber für x eine Reihe setzen, von der jedes einzelne Glied $= o$ wäre, hiesse eine Ungereimtheit begehn. Man darf also für die umgekehrte Reihe keine Form annehmen, wobey sich eine solche Nothwendigkeit ergeben würde, und sie kann, dem Vorhergehenden gemäß, nicht vermieden werden, wenn die Progression der Exponenten in ihr nicht so eingerichtet wird, daß die Differenz derselben $d = \frac{a\delta}{m}$ ist.

Es bleibt aber selbst alsdann, wenn man für die fingirte umgekehrte Reihe Exponenten annimt, die allmälig um $\frac{a\delta}{m}$ größer werden, in welchem Falle allerdings die Glieder der verschiedenen Reihen, welche bey der Substitution entstehn, in einander würklich bey Vereinigung eingreifen, die Frage zurück: ob nun das Resultat der ganzen Substitution würklich $= o$ gesetzt, und eben daraus alles, was in der fingirten Reihe vorläufig angenommen ist, völlig bestimmt werden kann.

Die Annahme, daß $d = \frac{a\delta}{m}$ seyn soll, läßt, da m jede willkührliche Zahl seyn darf, für die Form der fingirten umgekehrten Reihe, wie es scheint, unzählig viele bestimmte Gestalten zu. Wir wollen uns zuerst nur auf die einfachste, wo $m = 1$ ist, beschränken; es wird sich nachher zeigen, daß sie die einzige, welche gestattet werden kann, darstellt. Wir wollen also für x die Reihe $x = By^{a} + \overset{1}{B}y^{a+a\delta} .. + \overset{r}{B}y^{a+ra\delta} ..$, welche inskünftige die Grundreihe genannt werden soll, fingiren. Dieser Werth von x soll in der gegebenen Reihe $y = Ax^{\alpha} + \overset{1}{A}x^{\alpha+\delta} .. + \overset{r}{A}x^{\alpha+r\delta} ..$ substituirt, und die aus jedem ihrer Glieder dadurch entstandene neue Reihe eine Partialreihe genannt werden. Es soll endlich die Summe aller der so entstandenen Reihen, welche eine neue ähnlich gebildete, die Totalreihe genannt, hervorbringen muß, berechnet, und von ihr untersucht werden, ob und in wiefern sie würklich $= y$ gesetzt werden kann.

Es ist aus den Untersuchungen über die Substitution bekannt, daß, bey der angenommenen Gestalt der Grundreihe, die aus den einzelnen Gliedern der gegebenen entspringenden Partialreihen sich so vereinigen, daß jede folgende mit ihrem Anfangsgliede in ein Glied der ersten Partialreihe eingreift, dessen Zahl mit der der Partialreihe selbst identisch ist. Aus dem allgemeinen Ausdrucke für jedes Glied der Totalreihe ergab sich, daß jeder Coefficient von ihr aus eben so

vielen der fingirten Grundreihe gebildet wird, als seine eigne Zahl Einheiten enthält. Soll also die Totalreihe $= y$ gesetzt werden, so muß es unbedingt möglich seyn, ihr Anfangsglied $= y$, und jedes der folgenden für sich $= 0$ zu setzen. Denn offenbar kann, da die ganze Totalreihe mit y identisch seyn soll, nur eins ihrer Glieder $= y$, und es muß alsdann jedes der andern $= 0$ seyn. Das Anfangsglied der Totalreihe kann aber nicht $= 0$ seyn. Denn es enthält nichts als eine Potenz vom ersten Gliede der Grundreihe, mit einem bestimmten Factor multiplicirt. Soll es also $= 0$ werden, so muß die Größe, wovon es eine Potenz ist, es muß also das Anfangsglied der Grundreihe $= 0$ seyn. Eine Reihe aber, die kein Anfangsglied hat, ist eine Ungereimtheit. Setzen wir also, weil wir müssen, das Anfangsglied der Totalreihe, $AB^{\alpha}y^{a\alpha} = y$, so folgt daraus in Absicht auf die Exponenten, daß $a\alpha = 1$, mithin $a = \frac{1}{\alpha}$; in Absicht auf die Coefficienten, daß $A.B^{\alpha} = 1$, folglich $B = \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Es bestimmt sich also dadurch das Anfangsglied der Grundreihe vollkommen. Was aber alle übrigen Glieder der Totalreihe betrifft, so muß nun bewiesen werden, daß es möglich ist, jedes von ihnen $= 0$ zu setzen. Nun enthält der erste Coefficient der Totalreihe nur den ersten und anfänglichen der Grundreihe; der zweyte nur den zweyten und die vorhergehenden der Grundreihe; allgemein der r^{te} Coefficient der Totalreihe

nur den r^{ten} der Grundreihe und die vorhergehenden. Alle Coefficienten der Grundreihe sind noch unbestimmt; man verlangt aber zu wissen, ob nicht für sie Werthe angegeben werden können, welche die gegenwärtige Foderung erfüllen. Setzt man also jeden von den successiven Coefficienten der Totalreihe nach dem anfänglichen $= 0$, so bekommt man Gleichungen, in denen eben so viele unbekannte Größen vorhanden sind. Es ist aber bekannt, daß in diesem Falle jede der unbekannten Größen aus jenen Gleichungen gefunden werden kann. Wir wissen ferner aus dem Vorhergehenden (pag. 353) daß jeder Coefficient der Grundreihe da, wo er zum ersten Male zur Bildung eines Coefficienten der Totalreihe gebraucht wird, nur zur ersten Potenz erhoben, und mit einem bestimmten Factor multiplicirt, erscheint, während alle die übrigen Producte, welche neben diesem als zusammengehörige Theile den ganzen Coefficienten der Totalreihe bilden, aus niedrigeren Coefficienten der Grundreihe zusammengesetzt sind. So gibt also das successive $= 0$ Setzen von den Coefficienten der Totalreihe Gleichungen, von denen jede folgende eine unbekannte Größe mehr als die vorhergehende enthält, und worin diese unbekannte Größe nur auf die erste Potenz erhoben, und mit einem bestimmten Factor multiplicirt enthalten ist. Es wird sich also aus jeder neuen Gleichung eine neue unbekannte Größe, und zwar, weil die Gleichung in Beziehung auf sie nur vom ersten Grade ist, vermöge eines einzigen, möglichen und unzweydeutigen Werthes

bestimmen lassen. So gibt der erste Coefficient der Totalreihe, weil er nichts Unbestimmtes als den ersten der fingirten Grundreihe enthält, indem man ihn $=0$ setzt, den Werth dieses ersten Coefficienten der Grundreihe; der zweyte der Totalreihe, weil in ihm nur noch der zweyte der Grundreihe als unbekannt vorkommt, für diesen den Werth, welchen er haben muß. Es ist also unbedingt möglich, jeden folgenden Coefficienten der Totalreihe $=0$ zu setzen, und es ergeben sich gerade dadurch für alle fingirte Coefficienten der Grundreihe, bestimmte, mögliche und unzweideutige Werthe, die ihnen nothwendig beygelegt werden müssen, wenn die Grundreihe ihrer Bestimmung, die umgekehrte einer andern, gegebenen, zu seyn, erfüllen soll.

Das Resultat unsrer bisherigen Untersuchung ist folgendes. Wenn für die Reihe

$$y = A x^{\alpha} + \overset{1}{A} x^{\alpha + \delta} \ldots + \overset{r}{A} x^{\alpha + r\delta}$$

eine umgekehrte, welche den Werth von x durch y ausdrückt, gefunden werden soll, so ist es gestattet anzunehmen, daß diese neue Reihe, deren Coefficienten übrigens für den Anfang fingirt werden mögen, die Gestalt

$$x = B y^{\frac{1}{\alpha}} + \overset{1}{B} y^{\frac{1+\delta}{\alpha}} + \ldots \overset{r}{B} y^{\frac{1+r\delta}{\alpha}} \ldots$$

besitze (mithin die nemliche Differenz der Exponenten, wie die gegebene, nur durch deren Anfangsglied selbst dividirt). Und es wird allemal möglich seyn, die Coefficienten der umgekehrten Reihe aus denen der gegebenen durch mögliche unzwei-

deutige Ausdrücke zu berechnen. Der Mechanismus und das Gesetz dieser Berechnung macht den zweyten Theil der Untersuchung aus.

Eben dieses Resultat kann, aus den nemlichen Gründen, noch auf einem andern Wege erhalten werden. Nachdem die umgekehrte Reihe $x = Bx^a + \overset{1}{B}y^{a+d} .. + \overset{r}{B}x^{a+rd} ..$, wie vorhin fingirt worden ist, substituire man in jedem ihrer Glieder statt y den Werth, welchen die gegebene Reihe, $y = Ax^\alpha + \overset{1}{A}x^{\alpha+\delta} .. + \overset{r}{A}x^{\alpha+r\delta} ..$ dafür darbietet. Das Resultat aller dieser Substitutionen wird eine, nach Potenzen von x fortschreitende, Totalreihe seyn, welche = x gesetzt werden muß. Alle übrigen Schlüsse bleiben wie vorher, und man erhält auf diesem Wege die nemliche Form der fingirten umgekehrten Reihe, und die mit derselben verbundene Möglichkeit einer unfehlbaren unzweydeutigen Bestimmung der Coefficienten. Es würde Wiederholung der Vorhergehenden seyn, wenn diese Untersuchung von Neuem wieder angestellt werden sollte: indessen ist es doch nicht überflüssig, ihren Anfang in genaue Betrachtung zu ziehn. Hier ist die Grundreihe keine fingirte, sondern eine gegebene. Die Nothwendigkeit, daß alle Partialreihen in einander eingreifen, erhellet also noch unmittelbarer. Denn, wenn irgend eine von ihnen für sich = o gesetzt werden müßte, so ergäbe sich daraus der Widerspruch, daß eine Potenz von einer bestimmten Reihe = o seyn sollte.

Dieses Eingreifen der durch die Substitution entstandenen Partialreihen hat aber (p. 348) die Bedingung, daß die Differenz der Exponenten in der Reihe welche man substituirt, hier also δ, ein Product aus dem Anfangs-Exponenten der nemlichen Reihe, in die Differenz der Exponenten von der Reihe, in welche substituirt wird, durch irgend eine beliebige ganze Zahl dividirt, folglich $\delta = \frac{\alpha d}{m}$ seyn muß. Daraus folgt also rückwärts daß $d = \frac{m . \delta .}{\alpha}$, oder da $\alpha = \frac{1}{a}$, $d = m a \delta$ seyn müßte, wo unter m eine beliebige ganze Zahl verstanden werden kann. Insofern also, als die Reihe für y, welche wir suchen, wenn sie selbst umgekehrt würde, die gegebene für x hervorbringen müßte, ist es gestattet, der Progression ihrer Exponenten, eine unter dem unbestimmten Ausdrucke $m a \delta$ enthaltene Differenz beyzulegen. Insofern aber, als sie selbst eigentlich das Umgekehrte der gegebenen Reihe für x ist, fällt die Differenz ihrer Exponenten unter den unbestimmten Ausdruck $\frac{a \delta}{m}$. Nun aber gilt ebenso gut das Erste, als das Zweyte von ihr. Es muß also die Differenz ihrer Exponenten sowohl unter dem Ausdrucke $m a \delta$, als unter dem $\frac{1}{m} a \delta$ enthalten seyn. Es gibt aber nur eine Annahme, bey welcher beydes zugleich statt finden kann, wenn nemlich $m = 1$ gesetzt wird. Mithin ist $a \delta$ die

einzige Differenz, welche für die Progression der Exponenten in der fingirten Reihe genommen werden darf, und die Gestalt der umgekehrten Reihe, welche wir vorher nur als die einfachste aufgestellt, und dem Zwecke der Umkehrung völlig entsprechend gerechtfertigt haben, die einzig mögliche. Gestattet wird es freylich immer bleiben, wenn man die Umkehrung nur auf eine Weise, z. E. die erste vornehmen will, statt der eigentlichen fingirten Reihe $x = By^{\frac{1}{\alpha}} + \overset{1}{B}y^{\frac{1+\delta}{\alpha}} \ldots$ eine andre zu setzen, in welcher die Progression der Exponenten durch noch kleinere Unterschiede fortläuft. Es wird sich aber bey würklicher Berechnung finden, daß die Coefficienten von allen den Gliedern, die in der neu fingirten Reihe zwischen die der ersten gesetzt sind, $= 0$ werden; die Rechnung selbst wird auf diese zurückführen, indem sie das Ueberflüssige der Voraussetzung vernichtet. Auch davon ließe sich, wenn es nicht für unsre Absicht völlig überflüssig wäre, aus dem Gange der Substitution und der Form ihres Resultats eine Bestätigung geben.

Es kommt in höheren arithmetischen Untersuchungen sehr oft vor, daß gegebene Reihen umgekehrt werden müssen. Der Satz also: man dividire die Differenz der Exponenten der gegebenen Reihe durch den anfänglichen unter ihnen, so erhält man die der Exponenten der umgekehrten Reihe, ist von großer Wichtigkeit. Der particularste, am häufigsten vorkommende Fall ist derjenige, wo die gegebene Reihe

die successiven ganzen Zahlen, von 1 an, zu ihren Exponenten erhalten hat. Alsdann wird die umgekehrte von ihr gerade die nemliche Form besitzen. In Zeichen: wenn

$y = Ax + \overset{1}{A}x^2 + \overset{2}{A}x^3 \,.. + \overset{r}{A}x^{r+1} \,..$ so wird

$x = By + \overset{1}{B}y^2 + \overset{2}{B}y^3 \,.. + \overset{r}{B}x^{r+1}$

gesetzt werden müssen. Eine Reihe aber, die mit einem Gliede anhebt, worin von der Hauptgröße, welche sie regiert, gar keine Potenz vorkommt, läßt sich geradezu nicht umkehren.

Der zweyte Haupttheil von den Untersuchungen über die Reversion der Reihen betrifft die Coefficienten der umgekehrten Reihe, und die Art, wie ihre Werthe aus denen der gegebenen abgeleitet werden können. Sie ist verwickelt, führt aber zulezt auf ein sehr einfaches Gesetz zurück.

Um diese Untersuchung so allgemein als möglich zu machen, wollen wir ihren Umfang noch mehr erweitern. Es mag also nicht die eine Hauptgröße selbst, sondern irgend eine Potenz von ihr, durch eine nach Potenzen der andere sortschreitende Reihe gegeben seyn, und umgekehrt für eine beliebige Potenz der zweyten Hauptgröße eine Reihe gesucht werden, welche nach Potenzen der ersten fortgeht. In Zeichen: es soll die Reihe $y^m = Xx^{\beta} + \overset{1}{X}x^{\beta+\delta} \,.. + \overset{r}{X}x^{\beta+r\delta} \,..$ gegeben, und daraus rückwärts die Reihe

$$x^n = Yy^b + \overset{1}{Y}y^{b+d} \,.. + \overset{r}{Y}y^{b+rd}$$

gefunden werden.

Die Form, welche die gesuchte Reihe erhalten muß, leitet sich unmittelbar aus der vorigen Betrachtung ab. Wenn in der gegebenen Reihe für y^m die Progression der Exponenten $\beta, \beta + \delta$, u. s. w. ist, so wird sie in einer durch den polynomischen Lehrsatz sogleich für y zu erhaltenden Reihe, $\frac{\beta}{m}; \frac{\beta}{m} + \delta$, u. s. w. seyn. Wenn diese Reihe für y umgekehrt wird, so bekommt die, Anfangs zu fingirende, x ausdrückende Reihe, die Progression der Exponenten $\frac{m}{\beta}; \frac{m}{\beta} + \frac{m}{\beta}\delta$, u. s. w. Soll endlich diese Reihe, nachdem sie gefunden ist, zur n^{ten} Potenz erhoben werden, so muß die neue daraus hervorgehende mit ihren Exponenten die Progression $\frac{nm}{\beta}; \frac{nm}{\beta} + \frac{m}{\beta}\delta$, u. s. w. befolgen. Es wird also die zweyte, fingirte Reihe folgende Form besitzen

$$x^n = Yy^{\frac{nm}{\beta}} + {}^{1}Yy^{\frac{nm}{\beta}} * \frac{m\delta}{\beta} \ldots + {}^{r}Yy^{\frac{nm}{\beta}} * \frac{rm\delta}{\beta} \ldots$$

Das Gesetz, welchem die Coefficienten einer Reihe unterworfen sind, kann entweder recurrirend, oder independent gegeben werden. Hier gelangt man, der Natur der Sache gemäß, zuerst zu einer recurrirenden Bestimmung, und erst durch Hülfe dieser wird es möglich, auch einen independenten Ausdruck zu erhalten.

I. Die Recursionsformel für die Coefficienten der umgekehrten Reihe ergibt sich aus den bekannten Formeln für die Substitution unmittelbar, wenn man die gegebene Reihe in jedem Gliede der fingirten umge-

kehrten substituirt, und die daraus entstandene Totalreihe dem Werthe, welchen sie besitzen soll, identificirt. Man könnte zwar auch dadurch, daß man die Substitution in umgekehrter Ordnung vollzöge, zu dem nemlichen Zwecke gelangen, aber die Resultate würden sich nicht in einfacher Gestalt darbieten.

Wenn man in der fingirten Reihe

$$x^n = Yy^{\frac{nm}{\beta}} + \overset{1}{Y}y^{\frac{nm}{\beta}+\frac{m\delta}{\beta}} \ldots + \overset{r}{Y}y^{\frac{nm}{\beta}+\frac{rm\delta}{\beta}} \ldots$$

wo man auch zur augenblicklichen Abkürzung für y^m das Zeichen u gebrauchen, mithin diese Reihe durch

$$x^n = Yu^{\frac{n}{\beta}} + \overset{1}{Y}u^{\frac{n+\delta}{\beta}} \ldots + \overset{r}{Y}u^{\frac{n+r\delta}{\beta}} \ldots$$

ausdrücken könnte, für die Größe $y^m = u$ ihren gegebenen Werth

$$u = y^m = Xx^\beta + \overset{1}{X}x^{\beta+\delta} \ldots + \overset{r}{X}x^{\beta+r\delta}$$

substituirt, so ist das Anfangsglied der dadurch entstehenden Totalreihe $Y . X^{\frac{n}{\beta}} x^n \ldots$ Die ganze Totalreihe soll $= x^n$ seyn, es muß also der Coefficient ihres Anfangsgliedes, $YX^{\frac{n}{\beta}} = 1$, der Coefficient jedes folgenden $= 0$ seyn. Daraus also folgt zuerst, daß $Y = \frac{1}{X^{\frac{n}{\beta}}} = X^{-\frac{n}{\beta}}$ seyn muß. Was alle folgenden Coefficienten betrifft, so werden wir nur den allgemeinen Ausdruck für die der Totalreihe zu suchen, und $= 0$ zu setzen haben, um die Recursionsformel für sie zu bekommen. Nun aber ist, der Lehre von der Substitution gemäß, der r^{te} Coefficient der Totalreihe

(pag. 352) $\overset{k}{\circ\cdot\cdot r}\Sigma(\overset{k}{Y}.\overset{(n+k\delta)r-k}{\overline{\;\beta\;}}X)$. Dieser Ausdruck also, $=0$ gesetzt, gibt unmittelbar die gesuchte Recursionsformel.

Schreiben wir ihn ohne das abkürzende Summationszeichen auf die nemliche Art, wie wir früher Recursionsformeln darzustellen pflegten, so erhält er folgende Gestalt,

$$\overset{n}{Y}.\overset{r}{\overline{\beta}}X+\overset{1}{Y}.\overset{(n+\delta)r-1}{\overline{\;\beta\;}}X..+\overset{k}{Y}.\overset{(n+k\delta)r-k}{\overline{\;\beta\;}}X..+\overset{r}{Y}.\overset{(n+r\delta)}{\overline{\;\beta\;}}X=0$$

Man braucht offenbar nur das Anfangsglied dieser Form zu transponiren, und von seinem Coefficienten zu befreyen, um eine Formel zu bekommen, vermöge deren jeder Coefficient der gesuchten Reihe, jedes Y, aus allen vorhergehenden der nemlichen Reihe, und Größen, welche aus Coefficienten von bestimmten Potenzen der gegebenen Reihe bestehn, und insofern als bekannt angenommen werden dürfen, berechnet werden kann. Sie ist:

$$\overset{r}{Y}=-\left|\frac{\left(\frac{n+(r-1)\delta}{\beta}\right)\overset{1}{X}.\overset{r-1}{Y}..+\left(\frac{n+(r-k)\delta}{\beta}\right)\overset{k}{X}.\overset{r-k}{Y}..+\overset{n}{\overline{\beta}}\overset{r}{X}.Y}{\frac{n+r\delta}{\beta}X}\right|$$

Diese Formel ist sehr zusammengesetzt, und führt zu verwickelten Rechnungen, wenn sie zur recurrirenden Bestimmung der gesuchten Coefficienten gebraucht werden soll. Denn die Factoren, womit die schon bekannten Coefficienten multiplicirt werden müssen, um Producte zu erhalten, deren Summe die nächstfolgenden, gesuchten Coefficienten der fingirten Reihe hervor-

bringt, sind veränderlich, und müssen bey jeder neuen Recursion von Neuem berechnet werden. Und jede dieser Berechnungen ist weitläuftig; man muß die gegebene Reihe auf eine bestimmte Potenz erheben, und aus der dadurch hervorgehenden Form einen ihrer Coefficienten, von vorgeschriebener Zahl, herausheben, um einen einzelnen von jenen Factoren zu erhalten. Versuchen wir es, wenigstens einige der ersten Coefficienten auf diesem Wege würklich zu bestimmen. Auf diese Weise wird sich der Uebergang zu dem independenten Gesetze, wonach sie sich aus denen der gegebenen Reihe erzeugen, machen lassen.

II. Was den Coefficienten des Anfangsgliedes in der fingirten Reihe betrifft, so ist sein Werth schon aus dem Vorhergehenden bekannt, und muß es seyn, weil keine Recursion ihn geben kann. Wir fanden oben (pag. 378) $Y = \frac{1}{{}^{-n}X_{\beta}} = X^{\frac{-n}{\beta}} = {}^{\frac{-n}{\beta}}X$

Um also $\overset{1}{Y}$ zu erhalten; setzen wir $r = 1$, und die Formel gibt

$$\overset{1}{X} = \frac{{}^{\frac{n}{\beta}}X \cdot Y}{-\left(\frac{n+\delta}{\beta}\right)X}$$

Dieser Werth läßt sich bequemer entwickeln. Es ist nemlich ${}^{\frac{n}{\beta}}\overset{1}{X}$, d. h. der erste Coefficient der Potenz des Grades $\frac{n}{\beta}$ von der gegebenen Reihe $= \frac{n}{\beta} \cdot X^{\frac{n-1}{\beta}} \cdot X$. Eben so ist ${}^{\frac{n+\delta}{\beta}}X = X^{\frac{n+\delta}{\beta}}$. Mithin wird jener

$$\text{Bruch} = \frac{\frac{n}{\beta}\cdot X^{\frac{n}{\beta}-1}\cdot X^{-\frac{n}{\beta}}\cdot \overset{1}{X}}{X^{\frac{n+\delta}{\beta}}} = \frac{n}{\beta} X^{-\left(\frac{n+\delta}{\beta}\right)-1}\cdot \overset{1}{X}.$$

Man gebe dem Zahl-Coefficienten dieses Products den Factor $\frac{\beta}{n+\delta}$ um der Größe selbst, nach Absonderung desselben, das Umgekehrte dieses Factors wieder vorsetzen zu können, schreibe sie also, ohne Aenderung ihres Werths, $\left(\frac{n}{n+\delta}\right)\cdot{}^{-}\left(\frac{n+\delta}{\beta}\right)\cdot X^{-\left(\frac{n+\delta}{\beta}\right)-1}\overset{1}{X}$. Nun aber ist der erste Coefficient nach dem anfänglichen in einer Reihe, welche herauskommt, wenn man die gegebene auf die Potenz des Grades ${}^{-}\left(\frac{n+\delta}{\beta}\right)$ erhebt, $= {}^{-}\binom{n+\delta}{\beta}\cdot X^{\frac{-n+\beta}{\delta}-1}\cdot\overset{1}{X}$. Man erhält also für $\overset{1}{Y} = \left(\frac{n}{n+\delta}\right)\cdot{}^{-}\left(\frac{n+\delta}{\beta}\right)\overset{1}{X}$. Setzt man auf diesem Wege die Berechnung weiter fort, welche freylich für die folgenden Coefficienten immer mühsamer wird, so findet sich allmählig $Y = {}^{-}\frac{n}{\beta}X$;

$$\overset{1}{Y} = \left(\frac{n}{n+\delta}\right)\cdot{}^{-}\left(\frac{n+\delta}{\beta}\right)\overset{1}{X};\ \overset{2}{Y} = \left(\frac{n}{n+2\delta}\right)\cdot\left(\frac{n+2\delta}{\beta}\right)\overset{2}{X}, \text{u.s.w.}$$

Es scheint also folgendes allgemeine Gesetz in der Bildung aller Coefficienten zu herrschen. Jeder von ihnen ist ein einziger bestimmter Coefficient aus einer Reihe, welche entspringt, wenn man die gegebene auf die Potenz eines vorgeschriebenen Exponenten erhebt, nur daß ihm noch eine bestimmte Zahl als Factor beygegeben werden muß. Die gegebene Reihe, deren Coefficienten

durch X angedeutet werden, soll auf die Potenz des Grades $-\frac{n}{\beta}$ erhoben, und davon der Anfangs-Coefficient genommen werden, damit man den Anfangs-Coefficienten der umgekehrten Reihe erhalte; als Factor mag ihm, der Symmetrie der Ausdrücke wegen, noch $\frac{n}{n}=1$ beygegeben werden. Eben diese Reihe soll auf die Potenz $-\left(\frac{n+\delta}{\beta}\right)$ gebracht, und davon der erste Coefficient, mit beygegebenem Factor $\left(\frac{n}{n+\delta}\right)$, genommen werden, damit man den ersten Coefficienten der fingirten Reihe erhalte. Wäre das an den beyden ersten Coefficienten durch wirkliche Rechnung gefundene Gesetz allgemein richtig, so würde überhaupt der r^{te} Coefficient der fingirten Reihe $\overset{r}{Y}=\left(\frac{n}{n+r\delta}\right)\cdot \overset{r}{X}^{-\left(\frac{n+r\delta}{\beta}\right)}$ seyn. Die directe Ableitung dieses Gesetzes aus der Recursionsformel würde zu sehr verwickelten combinatorischen Betrachtungen führen; es ist in der That nicht auf diesem Wege, sondern durch Beobachtung gefunden. In so fern wird es denn auch gestattet seyn, bey dem Beweise von der Richtigkeit desselben den Weg der Induction einzuschlagen, und im Allgemeinen zu zeigen, daß es von jedem nächstfolgenden Coefficienten der umgekehrten Reihe gültig seyn müsse, falls es für alle vorhergehenden als unbedingt stattfindend angenommen werden darf. Freylich läßt diese Beweisart, nicht in Absicht auf die Wahrheit des

Satzes selbst, aber wohl in Beziehung auf die Art, wie man zur Einsicht desselben gelangt, vieles zu wünschen übrig. Sie kann nur dann eintreten, wenn man das Glück gehabt hat, durch Beobachtung Spuren eines Gesetzes zu finden, sollte also eigentlich nur da gebraucht werden, wo man auf keinem directen Wege aus der Natur des Gegenstandes Gesetze ableiten kann.

Wir nehmen also gegenwärtig an, daß für die r ersten Glieder jeder Reihe, wodurch irgend eine Potenz von x ausgedrückt werden soll, die Coefficienten nach dem Gesetze, welches eben ausgesprochen worden ist, aus denen einer gegebenen Reihe, die eine gewisse Potenz von y, durch Glieder, in denen x die Hauptgröße ist, darstellt, berechnet werden können, um zu untersuchen, wie alsdann der Coefficient des nächsthöheren $r+1^{ten}$ Gliedes in der gesuchten Reihe aussehn werde.

Die Methode der Untersuchung bleibt derjenigen ähnlich welche bey der Ableitung der recurrirenden Beziehung angewendet ist. Wir nehmen die gegebene Reihe nebst der aus ihrer Umkehrung entsprungenen fingirten. Wir setzen aber nicht, wie vorhin, in jedem Gliede der fingirten Reihe für die Hauptgröße, welche darin vorkommt, den Werth, welchen die gegebene Reihe für dieselbe darbietet, sondern umgekehrt, wie es eben so gut gestattet ist, wir nehmen die gegebene Reihe, substituiren in jedem Gliede derselben für die Hauptgröße, die es enthält, den Werth, welchen wir dafür aus der fingirten Reihe ziehn können. Auf

diese Weise bildet sich eine Totalreihe, in welcher alle Coefficienten, den des Anfangsgliedes abgerechnet, $= 0$ seyn müssen, und man erhält, indem man sie $= 0$ setzt, Gleichungen, wodurch sich die Beziehungen zwischen den Coefficienten der fingirten Reihe ergeben. Es würde sehr unbequem seyn, wenn man dieses Verfahren, um eine Recursionsformel für diese Coefficienten zu erhalten, wählen wollte; aber es gibt ein sehr bequemes Mittel, um den independenten Ausdruck jedes folgenden Coefficienten zu finden, wenn man ihn für die vorhergehenden schon in seiner Gewalt hat.

Die gegebene Reihe war

$$y^m = X x^{\beta} + \overset{1}{X} x^{\beta+\delta} \,.\,. + \overset{r}{X} x^{\beta+r\delta} \,.\,.$$

Wir wollen sie, um eine bequemere Substitution zu erhalten, auf die Potenz des Grades $\frac{n}{\beta}$ erhoben annehmen, wo es aber gar nicht nöthig ist, diese Potenzirung würklich auszuführen, sondern hinreicht, sie als geschehen anzudeuten.

Es sey also gegeben

$$y^{\frac{mn}{\beta}} = {}^{\frac{n}{\beta}}X x^n + {}^{\frac{n\,1}{\beta}}X x^{n+\delta} \,.\,. + {}^{\frac{n\,r}{\beta}}X x^{n+r\delta} \,.\,.$$

Die gesuchte Reihe hingegen ist

$$x^n = Y \cdot y^{\frac{nm}{\beta}} + \overset{1}{Y} \cdot y^{\frac{nm}{\beta} + \frac{m\delta}{\beta}} \,.\,. + \overset{r}{Y} y^{\frac{nm}{\beta} + \frac{rm\delta}{\beta}} \,.\,.\,.$$

Es soll in der ersten von diesen beyden Reihen jedes [illegible] vorgenommen, und für die Potenz von x, welche als [illegible] der Werth, ausgedrückt durch eine

nach Potenzen von y fortschreitende Reihe, substituirt werden. In der daraus hervorgehenden Totalreihe muß alsdann das Anfangsglied $= y^{\frac{nm}{\beta}}$ seyn, jedes folgende aber o zu seinem Coefficienten haben.

Aus der Lehre von der Substitution ist bekannt, wie die Partialreihen, welche aus den einzelnen Gliedern der die Substitution erleidenden Reihe entstehn, sich mit einander vereinigen. Will man allgemein das $r + 1^{te}$ Glied der Totalreihe, und dessen Coefficienten haben, so nehme man alle Glieder der gegebenen Reihe bis zum $r + 1^{ten}$. Jedes von ihnen gibt, nach geschehener Substitution, einen Theil zum $r + 1^{ten}$ Gliede der Totalreihe her. So entspringt aus dem Anfangsgliede der gegebenen Reihe, $\frac{n}{\beta} X x^n$, wenn man für x^n seinen fingirten Werth setzt, die erste Partialreihe, deren $r + 1^{tes}$ Glied, $\frac{n}{\beta} X . \overset{r+1}{Y}$ zum Coefficienten haben, und darin den ersten Beytrag zum Coefficienten des $r + 1^{ten}$ Gliedes in der Totalreihe abgeben wird. Allgemein, es entspringt aus dem k^{ten} Gliede der gegebenen Reihe $\overset{k}{Y} x^{\beta + k\delta}$, wenn man in ihm für $x^{\beta + k\delta}$ den Werth setzt, welchen die Umkehrung hervorbringt, eine Reihe, deren $(r + 1 - k)^{tes}$ Glied hervorgehoben werden muß, wenn man den Theil, welchen es zum $r + 1^{ten}$ Gliede der Totalreihe abgeben kann, und welcher der Zahl nach der k^{te} unter ihnen seyn wird, erhalten will. Sollte man würklich die fingirte Reihe $x^n = Y x^{\frac{nm}{\beta}} + ..$

$\overset{r}{Y} y^{\frac{nm}{\beta} + \frac{mr\delta}{\beta}}$ . . nehmen, um aus ihr allmälig auch $x^{n+\delta}$, . . $x^{n+k\delta}$ . . erst zu berechnen, und dann die Substitutionen dieser Größen würklich auszuführen, so würde eine fast unerträgliche Arbeit entstehn. Dies ist aber auf unserm gegenwärtigen Standpuncte keinesweges noch nöthig. Denn wir haben angenommen, daß, wenn eine Reihe wie $y^m = X x^\beta + \overset{1}{X} x^{\beta+\delta}$ . . $+ \overset{r}{X} x^{\beta+r\delta}$ . . gegeben ist, unb von irgend einer Potenz von x der Werth durch eine umgekehrte Reihe dargestellt werden sollte, jeder Coefficient dieser Reihe, falls seine Zahl nicht über $r + 1$ hinausgeht, sogleich in einem independenten Ausdrucke dargestellt werden könne. Aber von allen den Potenzen von x, für welche wir hier die Werthe zu substituiren haben, die allererste abgerechnet, werden zu unsrer Absicht aus den sie ausdrückenden Reihen nur solche Glieder gefodert, deren Zahl geringer als $r + 1$ ist. Diese also dürfen wir, dem angenommenen Gesetze gemäß, als schon bekannt voraussetzen, und so wird die ganze Reihe von Theilen, woraus sich der $(r + 1)^{te}$ Coefficient der Totalreihe bildet, nur eine einzige unbekannte Größe, nemlich $\overset{r+1}{Y}$ enthalten; so daß also, wenn man ihn $= 0$ setzt, der Werth von dieser berechnet, und folglich erforscht werden kann, ob die nemliche Regel, welche für die vorhergehenden Coefficienten angenommenen war, auch für den nächstfolgenden gültig ist.

Die Annahme, welche wir, durch Beobachtung an den Resultaten der würklichen Umkehrung geleitet, ge-

macht haben, war, dem Vorhergehenden gemäß, folgende. Wenn eine, nach Potenzen von x fortschreitende, Reihe, wie $y^m = X x^\beta + \overset{1}{X} x^{\beta + \delta} .. + \overset{r}{X} x^{\beta + r\delta} ..$ gegeben war, und nun eine umgekehrte Reihe, irgend eine willkührliche Potenz von x ausdrückend, gefodert wurde, wie $x^n = Y y^b + \overset{1}{Y} y^{b + d} ... + \overset{r}{Y} y^{b + rd}$, so sollte jeder Coefficient dieser gesuchten Reihe, bis zum r^{ten}, folgendermaaßen erhalten werden können. Die gegebene Reihe auf eine Potenz erhoben, deren Grad gefunden wird, wenn man den der gesuchten Potenz von x, hier n, um ein Vielfaches von der Differenz ihrer folgenden Exponenten, welches durch die Zahl des verlangten Coefficienten bestimmt wird, $r\delta$, vermehrt; diese Summe durch den Anfangsexponenten der gegebenen Reihe, dividirt, und dem Ganzen das — Zeichen gibt, $-\left(\frac{n + r\delta}{\beta}\right)$. Von dieser Potenz wird aber nur ein Coefficient, und zwar von gleicher Zahl mit dem gesuchten, gefodert. Gibt man ihm als Factor noch einen Bruch bey, dessen Zähler, sich immer gleich, der Grad der Potenz von x ist, für welchen man die Umkehrung macht, dessen Nenner dieselbe Zahl bleibt, die vorher als Zähler des Bruchs vorgeschrieben wurde, welcher den Exponenten derjenigen Potenz bezeichnet, worauf die gegebene Reihe erhoben werden sollte, $\left(\frac{n}{n + r\delta}\right)$ so hat man für die gesuchte Reihe den verlangten Coefficienten. Wir ha-

ben jezt nur zu prüfen, ob diese Annahme, wenn sie für jeden Fall bis zum r^{ten} Coefficienten gültig ist, auch für den nächstfolgenden statt finde.

Wenn wir also in der, aus der gegebenen abgeleiteten, Reihe

$$y^{\frac{mn}{\beta}} = {}^{\frac{n}{\beta}}X x^{n} + {}^{\frac{n\;1}{\beta}}X^{n+s} \ldots + {}^{\frac{n\;r}{\beta}}X x^{n+rs} + {}^{\frac{n\;r+1}{\beta}}X x^{n+(r+1)s}$$

statt der Potenzen von x, welche sie enthält, Reihen setzen sollen, wodurch, umgekehrt, die Werthe derselben ausgedrückt werden, so wissen wir schon für jede dieser Reihen, bis zum r^{ten} Gliede, wie ihre Coefficienten gebildet seyn werden.

Suchen wir nun, für die Totalreihe, welche aus allen diesen Partialreihen entspringen wird, den Coefficienten ihres $(r+1)^{ten}$ Gliedes. Es ist bekannt, wie jede einzelne von ihnen dazu beytragen wird.

Die Partialreihe, welche aus dem Anfangsgliede ${}^{\frac{n}{\beta}}X x^{n}$ der potenziirten gegebenen entspringt, gibt ihr $(r+1)^{tes}$ Glied selbst zu diesem Inbegriff her. Wie der $(r+1)^{te}$ Coefficient einer solchen umgekehrten Reihe, die x^{n} ausdrücken soll, gebildet seyn mag, ist noch unbekannt. Er mag also durch $\overset{r+1}{Y}$ ausgedrückt bleiben, so daß ${}^{\frac{n}{\beta}}X \, . \, \overset{r+1}{Y}$ das Anfangsglied für den $(r+1)^{ten}$ Coefficienten der Totalreihe seyn wird.

Die Partialreihe, welche aus dem ersten Gliede der potenziirten gegebenen, ${}^{\frac{n\;1}{\beta}}X \, . \, x^{n+s}$ entsteht, gibt ihr r^{tes} Glied zu der nemlichen Absicht her. Dies aber

können wir schon, unsrer Annahme zu folge, bestimmt angeben. Wir erheben die gegebene auf eine Potenz, deren Grad $-\left(\frac{n+\delta+r\delta}{\beta}\right)$ seyn wird, (da hier ein r^{ter} Coefficient verlangt wird), nehmen daraus den r^{ten} Coefficienten, und multipliciren ihn mit $\frac{n+\delta}{n+(r+1)\delta}$

So ist also das erste Glied für den Ausdruck des $(r+1)^{ten}$ Coefficienten der Totalreihe $=$

$\left(\frac{n+\delta}{n+(r+1)\delta}\right) . \overset{\frac{n}{\beta}\;1}{X} . \overset{-\left(\frac{n+(r+1)\delta}{\beta}\right)\;r}{X}$. Allgemein wird die Partialreihe, welche aus der Substitution in das k^{te} Glied der potenzirten gegebenen, $\overset{\frac{n}{\beta}\;k}{X}x^{n+k\delta}$, ihren Ursprung nimt, ihr $(r+1-k)^{tes}$ Glied zu der gesuchten Summe beytragen lassen. Sein Coefficient aber wird gefunden, wenn man die gegebene Reihe zu einer Potenz erhebt, welche, dem angenommenen Gesetze gemäß, [da die Potenz von x, woraus diese Reihe entsteht, vom Grade $n+k\delta$, und die Zahl des aus ihr verlangten Gliedes $(r+1-k)$ ist] zum Exponenten

$$-\left(\frac{n+k\delta+[r+1-k]\delta}{\beta}\right) = -\left(\frac{n+[r+1]\delta}{\beta}\right)$$

besitzt, von dieser Reihe das $(r+1-k)^{te}$ Glied seinen Coefficienten hergeben läßt, und ihn mit $\frac{n+k\delta}{n+(r+1)\delta}$ multiplicirt. Es ist allgemein das k^{te} Glied für den Ausdruck des $(r+1)^{ten}$ Coefficienten unsrer Totalreihe

$$\frac{n+k\delta}{n+(r+1)\delta} . \overset{\frac{n}{\beta}\;r}{X} . \overset{-\left(\frac{n+(r+1)\delta}{\beta}\right)\;r+1-k}{X}$$

Die Partialreihe endlich, welche aus dem $r+1^{ten}$ Gliede der potenzirten gegebenen, $\overset{n\,r+1}{\frac{}{\beta}}X\,x^{n+(r+1)\delta}$ hervorgeht, gibt zu diesem Ausdrucke den lezten Beytrag. Es ist von der Reihe, wodurch sich $x^{n+(r+1)\delta}$ in der Umkehrung entwickelt das Anfangsglied, woraus er herrührt. Man erhebe also die gegebene auf eine Potenz, deren Exponent — $\left[\frac{n+(r+1)\delta+0.\delta}{\beta}\right]$ ist, hebe daraus den Coefficienten des Anfangsgliedes hervor, und gebe ihm den Factor $\frac{n+(r+1)\delta}{n+(r+1)\delta}$. So ist also dieser lezte Beytrag $= \frac{n+(r+1)\delta}{n+(r+1)\delta}\cdot\overset{n\,r+1}{\frac{}{\beta}}X.\;{}^{-\left[\frac{n+(r+1)\delta}{\beta}\right]}X$

Jezt also haben wir vollständig den Ausdruck, welcher für den $r+1^{ten}$ Coefficienten der Totalreihe gehört, die man erhält, wenn in der angenommenen, $y^{\frac{mn}{\beta}} = \overset{n}{\frac{}{\beta}}X x^n + \overset{n\,1}{\frac{}{\beta}}X x^{n+\delta} .. + \overset{n\,r}{\frac{}{\beta}}X x^{n+r\delta} ..$ für x in jedem Gliede dessen, durch Umkehrung zu findender, nach Potenzen von y fortschreitender, Werth gesetzt wird. Wir sind berechtigt, diesen Coefficienten $=0$ zu setzen. Dadurch aber gelangen wir zu einer Gleichung in welcher von der fingirten Reihe für x^n nur ein einziger unbekannter Coefficient, der $(r+1)^{te}$ nemlich, neben lauter gegebenen Größen vorkommt, woraus sich also der Werth des ersteren finden lassen muß.

Es ist also, wenn wir zur augenblicklichen Abkürzung für $\frac{\beta}{n} = f$, und für $-\left[\frac{n+(r+1)\delta}{\beta}\right] = g$ setzen, mithin $n+(r+1)\delta = -\beta g$; $o = {}^f X . \overset{r+1}{Y} + \left(\frac{n+\delta}{g\beta}\right) {}^f\overset{1}{X} . {}^g\overset{r}{X} .. + \left(\frac{n+k\delta}{g\beta}\right) {}^f\overset{k}{X} . {}^g\overset{r+1-k}{X} .. + \left[\frac{n+(r+1)\delta}{g\beta}\right]$ ${}^f\overset{r+1}{X}\,{}^g X$ Wir transponiren das Anfangsglied des ganzen Ausdrucks, weil es die eigentliche unbekannte Größe enthält. Alsdann bleibt als Werth von $X . \overset{r+1}{Y}$ die Form

$$\frac{(n+\delta)\,{}^f\overset{1}{X}\,{}^g\overset{r}{X} .. + (n+k\delta)\,{}^f\overset{k}{X} . {}^g\overset{r+1-k}{X} .. + (n+r\delta)\,{}^f\overset{r+1}{X}\,{}^g X}{g\beta}$$

Es mag auf beyden Seiten der Gleichung, der Symmetrie wegen, noch das Glied $\frac{n}{g\beta} . {}^f X . {}^g\overset{r+1}{X}$ hinzugesetzt werden, so daß also auf der ersten Seite $\frac{n}{g\beta} . {}^f X . {}^g\overset{r+1}{X} + {}^f X . \overset{r+1}{Y}$, auf der andern Seite die vorige Form, mit diesem Gliede, als Anfangsgliede, vermehrt, vorhanden seyn wird.

Was aber diese Form betrifft, so läßt sie sich durch Hülfe des lezten Satzes in der Lehre von der Substitution sehr zusammenziehn (pag. 363). Wir haben hier, wie dort, eine Reihe, welche schon als Potenz einer andern gedacht wird,

$${}^f X . x^n + {}^f\overset{1}{X} x^{n+\delta} .. + {}^f\overset{r}{X} x^{n+r\delta}$$

Wir haben eine zweyte, welche eine andre Potenz

derselben Grundform ist, und wovon die Coefficienten durch ${}^{f}X$, ${}^{f}\overset{1}{X}$, .. ${}^{f}\overset{r}{X}$, .. angedeutet sind. Die vor uns liegende Form deutet den $(r+1)^{ten}$ Coefficienten eines Products an, welches aus der ersten, nachdem jedes ihrer Glieder mit dem Exponenten der in ihm liegenden Potenz multiplicirt ist, in die zweyte gemacht werden könnte. Statt dieses Products darf also, jenem Satze gemäß, $\left(\frac{n.[f+g]+f.[r+1]d}{f+g}\right){}^{f+g}\overset{r+1}{X}$ gesetzt werden.

Nun aber ist $f=\frac{n}{\beta}$, $g=-\left(\frac{n+[r+1]\delta}{\beta}\right)$.

Mithin wird $n.(f+g)+f.(r+1)\delta=\left(n.-\frac{(r+1)\delta}{\beta}\right)$ $+\left(\frac{-n}{\beta}.(r+1)\delta\right)=0$. Es fällt also die ganze Form auf der andern Seite des Gleichheitszeichens völlig weg, man erhält also $\frac{n}{g\beta}.{}^{f}X.{}^{g}\overset{r+1}{X}+{}^{f}X.\overset{r+1}{Y}=0$.

Daraus aber folgt sogleich $\overset{r+1}{Y}=-\frac{n}{g\beta}.{}^{g}\overset{r+1}{X}$, d. h. wenn für g sein bekannter Werth gesetzt wird, $\overset{r+1}{Y}=\left(\frac{n}{n+(r+1)\delta}\right).{}^{-\left(\frac{n+(r+1)\delta}{\beta}\right)}\overset{r+1}{X}$. Und auf diese Art ist die Gültigkeit des beobachteten Gesetzes für jeden folgenden Coefficienten dargethan. Die würkliche Rechnung hat es für die beyden ersten factisch bewiesen, es gilt also nun in völliger Allgemeinheit.

Es gibt gewiß nicht leicht irgend eine formale Rechnungsregel in der Arithmetik, die, verglichen mit

der Zusammengesetzheit des Gegenstandes, so einfach, und in Absicht auf den Gebrauch so weitumfassend wäre, als diese, eben bewiesene, independente Regel der Umkehrung. Sie gibt das erste Beyspiel eines Falls, wobey die independente Coefficientenbestimmung ohne Vergleich einfacher ist als die recurrirende. Wir wollen sie, in Zeichen zusammengezogen, als Resultat der bisherigen Betrachtungen zusammenfassen.

Es sey von einer beliebigen Potenz einer gewissen Hauptgröße der Werth durch eine Reihe gegeben, die nach unbestimmten, nur in irgend einer arithmetischen Progression befindlichen, Potenzen einer zweyten Hauptgröße fortgeht.

$$y^m = X x^{\beta} + \overset{1}{X} x^{\beta + \delta} \, .. \, \overset{r}{X} x^{\beta + r\delta}$$

Man sucht irgend eine willkührlich genommene Potenz der zweyten Hauptgröße, durch eine Reihe, die auf ähnliche Weise nach Potenzen der ersten fortschreitet, so daß sowohl deren Form, als auch die Coefficienten, aus den in der ersten Reihe gegebenen Größen abgeleitet werden sollen. Es sey z. E. x^n. Alsdann ist

$$x^n = {}^{\frac{-n}{\beta}} X x^{\frac{nm}{\beta}} + \left(\frac{n}{n+\delta}\right) . {}^{-\left(\frac{n+\delta}{\beta}\right)} \overset{1}{X} x^{\frac{nm + m\delta}{\beta}} + \left(\frac{n}{n+2\delta}\right) . {}^{-\left(\frac{n+2\delta}{\beta}\right)} \overset{2}{X} x^{\frac{nm + 2m\delta}{\beta}} \ldots + \left(\frac{n}{n+r\delta}\right) . {}^{-\left(\frac{n+r\delta}{\beta}\right)} \overset{r}{X} . x^{\frac{nm + rm\delta}{\beta}} \ldots$$

Der einfachste unter ihr enthaltene Fall, zugleich aber

derjenige, welcher am häufigsten vorkommen wird, ist der, wo m, n, β, δ, sämmtlich $= 1$ sind.

Wenn also, um für ihn die allgemeine Formel zu specialisiren

$$y = Xx + \overset{1}{X}x^1 + \ldots \overset{r}{X}x^r \ldots$$

gegeben ist, und man umgekehrt x durch eine Reihe verlangt, welche nach Potenzen von y fortgeht, so wird

$$y = {}^{-1}Xx + \tfrac{1}{2}.{}^{-2}\overset{1}{X}x^2 + \tfrac{1}{3}.{}^{-3}\overset{2}{X}x^3 \ldots + \tfrac{1}{n}.{}^{-n}\overset{n-1}{X}x^n + \ldots$$

Wollte man, etwas allgemeiner, die n^{te} Potenz von x haben, so wäre $x^n = {}^{-n}Xy^n +$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right).{}^{-(n+1)}\overset{1}{X}y^{n+1} \ldots + \left(\frac{n}{n+r}\right).{}^{-(n+r)}\overset{r}{X}y^{n+r} \ldots$$

Die Mühe der würklichen Berechnung bleibt freylich noch immer groß genug. Indessen kommt sie offenbar, selbst in dem verwickeltsten Falle, auf bloße Potenziirung der gegebenen Reihe zurück. Insofern ließe denn in der That unsre gefundene Regel noch einen andren, weiter zurückgeführten Ausdruck zu. Man könnte, statt der einzelnen Coefficienten, welche sie aus vorgeschriebenen Potenzen der gegebenen Reihe fodert, deren combinatorisch ausgedrückte Werthe, den Formeln des polynomischen Lehrsatzes gemäß, an die Stelle setzen. Da aber dadurch keine weitere Zusammenziehung der Ausdrücke möglich wird, und es als bekannt vorausgesetzt werden darf, wie Coefficienten einzelner Glieder von Potenzen gegebener Reihen berechnet werden müssen, so kann diese Zurückführung sehr wohl unterbleiben. Bey einer würklich gegebenen, individuell bestimmten Reihe, wird man, wenn sie

umgekehrt werden soll, vor allen Dingen nachzuforschen haben, ob sich nicht das allgemeine Gesetz für die Form, wodurch eine unbestimmte Potenz von ihr ausgedrückt werden mag, gleichfalls individuell angeben läßt. Ist dies erreicht, so wird sich augenblicklich für jede Potenz der Hauptgröße, wonach sie fortschritt, die deren Werth ausdrückende umgekehrte Reihe allgemein darstellen lassen.

Es verdient in Beziehung auf die allgemeine Reversionsformel wohl bemerkt zu werden, daß es Fälle gibt, wo sie Ausnahmen leidet. Wenn die gegebene Reihe mit einen Gliede anhebt, welches die Hauptgröße gar nicht enthält, wenn also in unsern lezten Zeichen, $\beta = 0$ ist, so fällt, wie schon oben bemerkt worden, die Umkehrung auf dem Wege unsrer Regel weg. In solchem Falle bleibt nichts übrig, als statt der zweyten Hauptgröße ein neues Zeichen einzuführen. Die Reihe

$$y^m = X 4 \overset{1}{X} x^\delta + \ldots \overset{r}{X} x^{r\delta} \ldots$$

läßt sich geradezu nicht umkehren. Setzt man aber

$y^m - X = u$, mithin $u = \overset{1}{X} x^\delta + \ldots \overset{r}{X} x^{r\delta} \ldots$ so ist es allerdings möglich, x, oder eine beliebige Potenz dieser Größe, durch eine Reihe darzustellen, die nach Potenzen von u fortschreitet. Hat man sie, so ist es gestattet, in ihr für u seinen Werth, $y^m - X$ zurückzusetzen. Dadurch entsteht zulezt allerdings eine Reihe die nach Potenzen von y fortschreitet. Aber die Coefficienten dieser Reihe werden jeder selbst eine unendliche

Reihe werden, und so ist wenig mit der ganzen Entwicklung gewonnen, wenn nicht diese Coefficientenreihen entweder auf geschlossene Ausdrücke zurückgeführt, oder convergirend gemacht werden können.

In jedem andern Falle ist es allemal möglich, die Umkehrung nach unsrer Regel zu vollführen, und die gesuchte Reihe, wenn man ihre Form nach dieser Regel bestimmt hat, wird mögliche, unzweydeutige Coefficienten erhalten, falls nicht etwa der ihres Anfangsgliedes, welcher in der That nach Umständen unmöglich oder vieldeutig seyn kann, indem er sich in die Werthe der folgenden einmischt, ihnen seine Beschaffenheit mittheilt. Aber dabey kann es Fälle geben; wo unsre independente Coeffcientenbestimmung keine Anwendung zu finden scheint. Der allgemeine Ausdruck für den r^{ten} Coefficienten der aus der Umkehrung entstandenen Reihe hatte als Factor $\left(\frac{n}{n+r\delta}\right)$, neben einem Coefficienten der Potenz des Grades $-\left(\frac{n+r\delta}{\beta}\right)$ von der gegebenen Reihe. Hier sind offenbar Fälle denkbar, wo dieser Ausdruck ungereimt scheint; es wird jedesmal eintreten, wenn $n+r\delta=0$, also $n=-r\delta$. Denn alsdann wird zwar nicht die gefoderte Potenz der gegebenen Reihe (welche die 0te seyn soll) aber wohl der Factor, welcher den aus ihr herausgerissenen Coefficienten begleiten soll, $\frac{n}{0}$, ein arithmetisch ungereimter Ausdruck. In allen Fällen also, wo die Potenz der zwey-

ten Hauptgröße, x, welche man verlangt, einen Grad haben soll, der das Umgekehrte von irgend einem Vielfachen der Differenz ist, welche in der Progession der Exponenten, die in der gegebenen Reihe liegen, stattfindet, kann die independente Regel der Reversion nicht angewendet werden, obgleich allerdings eine Umkehrung möglich ist, und auf dem recurrirenden Wege die Coefficienten-Bestimmung durchaus keine Schwierigkeit finden würde. In solchem Falle wird man aber doch nicht gezwungen seyn, die recurrirende Bestimmung als das einzige Hülfsmittel zu ergreifen. Wenn x^{+n} nicht geradezu gefunden werden kann, so berechne man zuerst x^{-n}. Wenn für irgend einen Werth von r die Größe $n + r\delta = o$ geworden ist, so wird ebendeswegen $-n + r\delta$ niemals $= o$ werden können. Die Regel der independenten Bestimmung gibt also unfehlbar alle Coefficienten der Reihe, welche x^{-n} durch Umkehrung darstellt. Hat man diese Reihe zu soviel Gliedern, als die eigentlich gesuchte enthalten sollte, so erhebe man sie zur Potenz des Grades -1, oder finde, nach den bekannte Regeln der Division $\frac{1}{x^{-n}}$. Auf diesem, freylich etwas indirecten Wege, wird sich dennoch das Verlangte erhalten lassen.

Man kann indessen, ohne so viele Umständlichkeit, und aus der independenten Formel selbst geradezu, das Gesuchte dennoch erhalten, wenn man sich eine Art des Rechnens erlauben will, die in der That den allge-

meinen Regeln völlig gemäß ist, und insofern keiner weiteren Rechtfertigung bedarf. Wenn $n + r\delta = o$, so gibt allerdings eine Potenz der Reihe $Xx^{\beta} + Xx^{\beta+\delta} .. + Xx^{\beta+r\delta} ..$, deren Exponent $-\left(\frac{n+r\delta}{\beta}\right)$ seyn soll, den Totalwerth der Potenziirung $= 1$, so daß also alle folgende Coefficienten in seinem Ausdrucke $= o$ seyn müssen. Niemand würde sich also die Mühe geben, nach der allgemeinen Formel des polynomischen Lehrsatzes von $\overset{-\left(\frac{n+r\delta}{\beta}\right)}{\underset{}{X}}{}^{r}$ den Werth darzustellen, falls er wüßte, daß $\frac{n + r\delta}{\beta} = o$ seyn sollte. Allerdings würde der berechnete Werth dieses Coefficienten, wenn man ihn erst, ohne $\frac{n + r\delta}{\beta}$ zu bestimmen, suchte, und hernach in ihm $n + r\delta = o$ setzte, weil alle Theile desselben den Factor $n + r\delta$ unfehlbar enthalten, auch so $= o$ gefunden werden. Und in der That muß diese Berechnung unternommen werden. Denn man hat dem Coefficienten noch außerdem $\frac{n}{n + r\delta}$ als Factor beygegeben; ein Ausdruck, welcher für sich, wenn $n + r\delta = o$ gesetzt wird, alle arithmetische Bedeutung verliert. Man hebe aber den Divisor, welcher in ihm vorkommt, gegen den Factor, welchen alle Theile des Coefficienten enthalten, und das, was übrig bleibt, wird eine reelle, unzweydeutige Größe seyn. Es ist leicht, sich von der Richtigkeit dieser Behauptung zu überzeugen. Nennen wir zur Abkür-

zung $^{-\left(\frac{n+r\delta}{\beta}\right)} = p$, so ist, nach der bekannten Regel des polynomischen Lehrsatzes von $(X x^{\beta} \overset{1}{X} x^{\beta+\delta} \ldots)^p$ der Coefficient des r^{ten} Gliedes $= {}^{1\ldots r}\Sigma({}^p\overset{h}{\mathfrak{B}} \overset{h}{X}{}^{p-h} p.\overset{h}{C})$. Setzt man für ${}^p\overset{h}{\mathfrak{B}}$ seinen Werth $\frac{p.(p-1)\ldots[p-(h-1)]}{1\,.\,2\,\ldots\,h}$ an die Stelle, und sondert man, weil ihn alle Binomialcoefficienten gemeinschaftlich haben, den Factor p ab, so wird jener Coefficient, da er noch außerdem durch $\frac{n}{n+r\delta}$ multiplicirt werden soll,

$$p.\left(\frac{n}{n+r\delta}\right) {}^{1\ldots p}\Sigma\left[\frac{(p-1)\ldots[p-(h-1)]}{1\,.\,2\,\ldots\,h} \overset{h}{X}{}^{p-h} p\overset{h}{C}\right].$$

Nun war $p = -\left(\frac{n+r\delta}{\beta}\right)$; es ist also

$p.\left(\frac{n}{n+r\delta}\right) = -\frac{n}{\beta}$. Es soll ferner $p = 0$ seyn. Der Coefficient $\frac{(p-1)\ldots[p-(h-1)]}{1\,.\,2\,\ldots\,h}$ reducirt sich also auf $\frac{(-1)^{h-1}}{h}$; es wird also

$$\left(\frac{n}{n+r\delta}\right).^{-\left(\frac{n+r\delta}{\beta}\right)}\overset{r}{X} = \left(\frac{-n}{\beta}\right).^{1\ldots r}\Sigma\left(\frac{[-1]^{h-1}}{h}.\overset{h}{X}{}^{-h}p\overset{h}{C}\right)$$

für den Fall wo $n+r\delta=0$ seyn soll. Mit dieser näheren Bestimmung kann man die Regel der independenten Coefficientenbestimmung für die aus der Umkehrung erfolgende Reihe auch in allen den Fällen gebrauchen, wo sie auf den ersten Blick gar nicht an-

wendbar erschien. Nur der eine Fall, wo $\beta = 0$, gehört nicht hieher, und für ihn bleibt es bey dem vorhin Gesagten.

Sechzehntes Kapitel.

Von den Entwicklungen, die durch Umkehrung der Reihen möglich werden.

Eine noch viel allgemeinere Aufgabe, als diejenige, welche zur Umkehrung der Reihen Veranlassung gab, ist die folgende. Man hat eine Gleichung zwischen zwey Hauptgrößen, in welcher irgend eine Function der einen (d. h. irgend ein arithmetischer Ausdruck, welcher sich aus ihr und andern bekannten Nebengrößen gebildet hat), einer beliebigen Function der andern gleich gesetzt wird. Man verlangt den Werth, welchen eine, gleichfalls willkührliche, Function der einen von diesen beyden Hauptgrößen erhalten wird, durch eine Reihe ausgedrückt, welche nach Potenzen der andern Hauptgröße fortschreitet. Man bedient sich der Zeichen φ, ψ, χ, indem man sie vor die Zeichen gewisser Hauptgrößen setzt, um dadurch den unbestimmten Begriff von beliebigen Functionen dieser Größe im Allgemeinen anzudeuten. So lautet also die obige Aufgabe in Zeichen: Man hat die Gleichung $\varphi(x) = \psi(y)$ und verlangt nun $\chi(y)$ durch eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe.

Es ist möglich, für die Auflösung dieser Aufgabe eine allgemeine Regel zu geben, insofern sich jede

der drey Functionen, wovon hier die Rede ist, in eine Reihe, die nach Potenzen der in ihr enthaltenen Hauptgröße, mit Exponenten, die in irgend einer arithmetischen Progression fortschreiten, entwickeln läßt. Die Regeln solcher Entwicklungen gibt die ganze vorhin vorgetragene Theorie. Wir nehmen also hier an, daß

$$\varphi(x) = X x^{\alpha} + \overset{1}{X} \alpha^{\alpha+d} \, .. + \overset{r}{X} x^{\alpha+rd} \, ..$$

$$\psi(y) = Y y^{\beta} + \overset{1}{Y} y^{\beta+\delta} \, .. + \overset{r}{Y} y^{\beta+r\delta} \, ..$$

$$\chi(y) = \mathfrak{Y} y^{\gamma} + \overset{1}{\mathfrak{Y}} y^{\gamma+\Delta} \, .. + \overset{r}{\mathfrak{Y}} x^{\gamma+r\Delta} \, ..$$

gegebene Größen sind.

Der Gang der Arbeit selbst, welche nöthig ist, um $\chi(y)$ durch eine Reihe darzustellen, welche nach Potenzen von x fortschreitet, wird folgender seyn.

Man nenne für den Augenblick $\psi(y) = u$. So hat man, weil $\varphi(x) = \psi(y)$ seyn sollte, zuerst:

$$u = Y \cdot y^{\beta} + \overset{1}{Y} y^{\beta+\delta} \, .. + \overset{r}{Y} y^{\beta+r\delta} \, ..$$

Nun kann man, vermöge den Recursionsformel, für jede Potenz von y den Werth durch eine Reihe finden, die nach Potenzen von u fortschreitet. Man kann also jedes Glied der dritten Reihe, welche $\chi(y)$ darstellt, auf diese Weise durch eine nach Potenzen von u fortschreitende Form darstellen. Ist dieses geschehn, so braucht man nur zu bedenken, daß $u = \psi(y)$, zugleich $= \psi(x)$ war, mithin der Werth von u

auch durch die Reihe für $\phi(x) = Xx^{\alpha} + \overset{1}{X}x^{\alpha+d} \ldots + \overset{r}{X}x^{\alpha+rd} \ldots$ dargestellt werden kann. Man setze also in jedem Gliede der Form, welche $\chi(y)$, nach Potenzen von u fortschreitend, gegeben hat, für u diese lezte Reihe an die Stelle. So entwickelt sie sich in lauter Reihen, wovon jede selbst nach Potenzen von x fortgeht, und man erhält in dem Inbegriffe derselben den verlangten Werth für $\chi(y)$ durch eine Reihe entwickelt, in deren einzelnen Gliedern nur Potenzen von x mit bestimmten Coefficienten vorkommen werden.

So ist der Gang dieser Arbeit leicht beschrieben, und auf bekannte Regeln zurückgeführt. Aber die würkliche Ausführung ist mit unvermeidlicher Weitläuftigkeit verbunden; die Form des Resultats wird zusammengesetzt, und der allgemeine Ausdruck desselben in Zeichen kann nicht anders als sehr verwickelt ausfallen.

Was den Anfang der Arbeit betrifft, wo aus der gegebenen Reihe, $u = Yy^{\beta} + \overset{1}{Y}y^{\beta+\delta} \ldots + \overset{r}{Y}y^{\beta+r\delta}$, durch Umkehrung, für mehrere, nachher genauer zu bestimmende, Potenzen von y, Reihen, die nach Potenzen von u fortgehn, abgeleitet werden sollen, so ist dies zwar, der allgemeinen Reversionsformel gemäß, unbedingt möglich, aber jede dieser Reihen wird eine eigene Progression der Exponenten bekommen, und also an eine fernere Addition derselben im Allgemeinen nicht zu denken seyn.

Wenn man also zweytens verlangt, die bekannte Reihe für $\chi(y) = \mathfrak{Y} y^{\gamma} + \overset{1}{\mathfrak{Y}} y^{\gamma+\Delta} \ldots + \overset{r}{\mathfrak{Y}} y^{\gamma+r\Delta} \ldots$ zu nehmen, und in jedem Gliede von ihr, statt der Potenz von y, die es enthält, eine, durch die eben vorhin bezeichnete Umkehrung zu findende, Reihe, die nach Potenzen von u fortgeht, zu setzen, so kann es geschehn, aber diese Reihen werden sich nicht durch würkliche Addition gleichhoher Glieder in eine Totalreihe bringen lassen, sondern neben einander als Theile, deren Vereinigung nur angedeutet werden kann, stehn bleiben. Wollte man also den Werth von $\chi(y)$ in einem allgemeinen Ausdruck zusammenfassen, so müßte man für jede Reihe, welche es als Theil in sich enthält, einen allgemeinen Ausdruck geben, woraus die Bildung ihrer einzelnen Glieder erkannt werden könnte. Nun entspringt die r[te] unter den Reihen, welche den Werth von $\chi(y)$ ausmachen, aus dem r[ten] Gliede der für $\chi(y)$ gegebenen Reihe, $\overset{r}{\mathfrak{Y}} y^{\gamma+r\Delta}$, wenn man in ihm für die Potenz von y, welche es enthält, den Werth setzt, welcher aus der Umkehrung der Reihe $u = \mathfrak{Y} y^{\beta} + \overset{1}{\mathfrak{Y}} y^{\beta+\delta} \ldots \overset{r}{\mathfrak{Y}} y^{\beta+r\delta} \ldots$ erhalten werden kann. Dem bekannten Gesetze der Umkehrung gemäß entwickelt sich $y^{\gamma+r\Delta}$ in eine Reihe, von welcher unbestimmt das q[te] Glied seyn wird:

$$\left(\frac{\gamma+r\Delta}{\gamma+r\Delta+q\delta}\right) \cdot \left(-\frac{\gamma+r\Delta+q\delta}{\beta}\right) \overset{q}{Y} u^{\frac{\gamma+r\Delta+q\delta}{\beta}}$$

Man gebe ihm den Factor, welchen $y^{\gamma+r\Delta}$ bey sich

führt, und man erhält das q^{te} Glied der 1ten Reihe, woraus $\chi(y)$ zusammengesetzt ist:

$$\overset{r}{\mathfrak{Y}} . \left(\frac{\gamma + r\Delta}{\gamma + r\Delta + q\delta}\right)^{-\left(\frac{\gamma + r\Delta + q\delta}{\beta}\right)} \overset{q}{Y} . u^{\frac{\gamma + r\Delta + q\delta}{\beta}}$$

Man hat in der That in diesem Ausdruck das ganze Gesetz der Entwicklung von $\chi(y)$. Diese Größe setzt sich aus Gliedern zusammen, von deren jedes eine Reihe ist, welche nach Potenzen von u fortgeht. Alle diese Reihen sind in Absicht auf die Bildung ihrer Glieder einem gemeinschaftlichen Gesetze unterworfen. Will man die erste Reihe haben, so setze man $r = 0$, und man wird, wenn allmälig alsdann für q die Werthe, 0, 1, 2, u. s. w. gesetzt werden, ihre successiven Glieder nach der Reihe bekommen. Verlangt man die erste nach ihr, so setze man $r = 1$, und verfahre wie vorhin. Auf diese Art fortschreitend, wird man allmälig aus unserm Ausdrucke den vollständigen Werth von $\chi(y)$ entwickeln können.

Aber nun ist noch der lezte Theil der Arbeit zurück. Die Größe u, nach welcher die einzelnen Glieder der Reihen fortschreiten, ist selbst eine Form, welche nach Potenzen von x fortgeht. Man muß also für sie noch ihren Werth, $u = Xx^{\alpha} + Xx^{\alpha + d} .. + Xx^{\alpha + kd} ..$ setzen. Alsdann wird sich jedes Glied aus allen den Reihen, welche vereint den Werth von $\chi(y)$ ausmachen, selbst wieder in eine unendliche Reihe entwickeln. Allgemein: aus dem q^{ten} Gliede der 1ten Reihe, welche $\chi(y)$ in sich faßt, wird, insofern es von u die Potenz $u^{\frac{\gamma + r\Delta + q\delta}{\beta}}$ enthält, wenn man für u seinen Werth substituirt,

eine neue Reihe entstehn, von welcher allgemein das k^{te} Glied durch $\frac{\gamma + r\Delta + q\delta}{\beta}\overset{k}{X} x^{\alpha\left(\frac{\gamma + r\Delta + q\delta}{\beta}\right) + kd}$ angedeutet werden kann.

So ist also der Werth von $\chi(y)$, wenn wir Alles in einen Ausdruck zusammen fassen wollen, eine Zusammenstellung mehrerer Reihen, von denen aber jedes Glied selbst wieder durch eine unendliche Reihe dargestellt werden muß. Will man für die r^{te} Reihe, woraus $\chi(y)$ besteht, das q^{te} Glied wissen, so ist dasselbe eine Reihe, in welcher unbestimmt der k^{te} Theil durch

$$\overset{r}{\mathfrak{Y}}\left(\frac{\gamma + r\Delta}{\gamma + r\Delta + q\delta}\right) \cdot \overset{-\left(\frac{\gamma + r\Delta + q\delta}{\beta}\right)q}{Y} \cdot \frac{\gamma + r\Delta + q\delta}{\beta}\overset{k}{X} \cdot$$

$$x^{\alpha\left(\frac{\gamma + r\Delta + q\delta}{\beta}\right) + kd}$$ ausgedrückt werden kann.

In der That enthält diese Formel Alles, was zur Auflösung einer so verwickelten und allgemeinen Aufgabe, wie die angenommene, irgend erfoderlich seyn kann. Im Allgemeinen ist bey ihr keine weitere Zusammenziehung möglich. Sie verlangt offenbar nichts weiter als einzelne Coefficienten aus Potenzen eines vorgeschriebenen Grades von gegebenen Formen, kann also durch Hülfe des polynomischen Lehrsatzes immer realisirt werden. In particulären Fällen ist aber allerdings eine Vereinfachung gestattet, so daß die Totalreihe, welche den Werth von $\chi(y)$ darstellt, in eine einzige nach Potenzen von x fortgehende, in welcher die Exponenten eine arithmetische Progression beobachten, zusammengezogen werden kann. Die in

der Lehre von der Substitution gegebenen Bedingungen, unter denen die Totalreihen, welche durch Substitution von Reihen in Reihen entstehn, sich zu einer einzigen, ähnlich gebildeten, vereinigen, könnten sogleich dienen, um diese particulären Fälle weiter zu entwickeln.

Es mag nur einer von diesen Fällen, als Beyspiel, in genauere Betrachtung kommen.

Wie vorhin sey $\varphi(x) = Xx^{\alpha} + \overset{1}{X}x^{\alpha+d} \ldots + \overset{r}{X}x^{\alpha+rd}$

und $\psi(y) = \varphi(x) = Yy^{\beta} + \overset{1}{Y}y^{\beta+\delta} \ldots + \overset{r}{Y}y^{\beta+r\delta}$

Man sucht, durch eine Reihe, die nach Potenzen von x fortgehn soll, y^n, unter einer Voraussetzung, welche für diese Größe eine Reihe darbietet, in welcher die Exponenten als Glieder einer einzigen arithmetischen Progression erscheinen.

Nennt man, wie vorhin, $\psi(y) = u$, so wird, durch Umkehrung der Reihe für $\psi(y)$, der Werth von y durch eine nach Potenzen von u fortschreitende Reihe gefunden, deren Exponenten nach der Progression $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\beta} + \frac{\delta}{\beta}$, u. s. w. fortgehn. In dieser Reihe soll statt u die erste angenommene, $Xx^{\alpha} + \overset{1}{X}x^{\alpha+d} \ldots$ substituirt werden. Die einfachste Voraussetzung, unter welcher die aus dieser Substitution entspringenden Partialreihen sich würcklich vereinigen ist, daß $d = \frac{\alpha}{\beta}\delta$ sey (pag. 350). Nennen wir, zur Abkürzung $\frac{\alpha}{\beta} = c$, mithin $\alpha = c\beta$, so ist

also die zu lösende Aufgabe folgende. Es ist $Xx^{c\beta}$ $+\overset{1}{X}x^{c\beta+c\delta}\ldots+\overset{r}{X}x^{c\beta+rc\delta}\ldots=Yy^{\beta}+\overset{1}{Y}y^{\beta+\delta}+\overset{r}{Y}y^{\beta+r\delta}\ldots$ Man sucht y^{n} durch eine Reihe die nach Potenzen von x fortgeht. Heißt, wie vorhin, die zweyte Reihe u, so gibt die unmittelbare Anwendung der Reversionsformel für x^{n} eine Reihe, nach Potenzen von u fortgehend, deren h^{tes} Glied allgemein durch $\left(\frac{n}{n+h\delta}\right)\cdot\left(-\frac{n+h\delta}{\beta}\right)\overset{h}{X}\,u^{\frac{n+h\delta}{\beta}}$ ausgedrückt werden kann. Nun will man noch in dieser Reihe für u den Werth $Xx^{c\beta}+\overset{1}{X}x^{c\beta+c\delta}\ldots$ substituiren. So entsteht aus jedem Gliede von ihr eine neue Reihe, die sich aber mit den andern zu einer einzigen Totalreihe vereinigt. Zu dem r^{ten} Gliede dieser Totalreihe, welches $x^{nc+cr\delta}$ enthalten muß, trägt jedes Glied der ersten, nach Potenzen von u fortgehenden, vom Anfangsgliede an, bis zum r^{ten} einen Theil bey, mithin das h^{te} Glied, welches $u^{\frac{n+h\delta}{\beta}}$ in sich schließt, den h_{ten} Theil zu jenes gesuchten Gliedes Coefficienten. Es ist aber von $u^{\frac{n+h\delta}{\beta}}=(Xx^{c\beta}+\overset{1}{X}x^{c\beta+c\delta}\ldots)^{\frac{n+h\delta}{\beta}}$ das Glied, welches x^{nc+crd} enthalten wird, in seiner Reihe das $(r-h)^{te}$. Sein Coefficient ist, in allgemeinen Zeichen ausgedrückt, $\left(\frac{n+h\delta}{\beta}\right)\overset{r-h}{X}$. Man multiplicire ihn mit dem Factor, welchen $u^{\frac{n+h\delta}{\beta}}$ bey sich führte, und man hat für den Coefficienten des r^{ten} Gliedes

derjenigen Reihe, wodurch sich x^n berechnen läßt, den q^{ten} Theil =

$$\left(\frac{n}{n+h\delta}\right) \cdot {}^{-}\left(\frac{n+h\delta}{\beta}\right)^{h}_{X} \cdot \left(\frac{n+h\delta}{\beta}\right)^{r-h}_{X}.$$

Will man nach dieser Formel einen einzelnen Coefficienten berechnen, so bestimme man zuerst seine Zahl, r. Alsdann setze man, ohne sie weiter zu ändern, für h allmälig alle ganze Zahlen nach der Reihe, auch o mitgerechnet, und man wird die successiven Glieder des Ausdrucks, welcher den gesuchten Coefficienten bildet, erhalten.

Wir wollen uns begnügen, von den unzähligen Aufgaben deren Auflösung durch die Reversion der Reihen möglich wird, nur eine particuläre, aber für den Gebrauch höchst wichtige, in nähere Betrachtung zu ziehn. Die Auflösung der Gleichungen höherer Grade, durch geschlossene arithmetische Ausdrücke, die, aus den Coefficienten der Gleichung gebildet, den Werth ihrer Wurzeln darzustellen vermögten, steht nicht in unsrer Gewalt. Aber Reihen zu erhalten, wodurch der Werth dieser Wurzeln aus jenen Coefficienten entwickelt werden kann, wird uns auf vielfache Weise möglich seyn.

Die Form einer Gleichung sey

$$ax^n + \overset{1}{a}x^{n-1} + \overset{2}{a}x^{n-2} \ldots + \overset{k}{a}x^{n-k} \ldots + \overset{n}{a} = 0.$$

Man transponire irgend ein Glied derselben, $\overset{k}{a}x^{n-k}$, wo etwa durch Unterstreichen angedeutet werden mag, daß dieses Glied auf der vorigen Seite nicht mehr vorkommen soll

$$ax^n + \overset{1}{a}x^{n-1} + \overset{2}{a}x^{n-2} .. + \underline{\overset{k}{a}x^{n-k}} .. + \overset{n}{a} = -\overset{k}{a}x^{n-k}$$

Man befreye dieses transponirte Glied, durch Division auf beyden Seiten, von der Potenz der Hauptgröße, welche in ihm vorkommt. Die dadurch entstandene Form behält die vorige Progression der Exponenten, denn weder die gleichgroße Verringerung der anfänglichen Exponenten, noch das Weglassen eines von ihnen, kann darin eine Aenderung hervorbringen

$$ax^k + ax^{k-1} .. + \underline{\overset{k}{a}}x^0 + \overset{k+1}{a}x^{-1} .. + \overset{n}{a}x^{-(n-k)} - \overset{k}{a} =$$

Nennt man also nun $-\overset{k}{a} = y$, so hat man offenbar y durch eine Reihe ausgedrückt, die nach Potenzen von x, mit arithmetischer Progression der Exponenten, fortgeht, und es kann durch unmittelbare Anwendung der Reversionsformel, aus ihr x, durch eine Reihe, die nach Potenzen von y, d. h. nach Potenzen von $-\overset{k}{a}$ fortschreitet, erhalten werden.

Ob man die Reihe, welche sich umkehren soll, steigend oder fallend anordnen will, bleibt der Willkühr überlassen; beydes ist gleich möglich, da die Zahl ihrer Glieder völlig bestimmt ist. Man kann also den Werth von x nach Belieben in einer steigenden oder in einer fallenden Reihe erhalten.

Man kann auch, ehe man zur Umkehrung schreitet, auf beyden Seiten der Gleichung mit einer beliebigen bestimmten Zahl dividiren, und so auf der einen Seite die Coefficienten, auf der andern die Größe, welche y heissen soll, verändern. Am bequemsten

für die Rechnung im Allgemeinen wird es seyn, wenn man das erste Glied der nach Potenzen von x geordneten Form durch Division von seinem Factor befreyt; also auf beyden Seiten mit a, wenn man fallend, mit $\overset{n}{a}$, wenn man steigend geordnet hat, dividirt. Die Reihe, welche x ausdrückt, wird im ersten Falle nach Potenzen von $-\frac{\overset{k}{a}}{a}$, in andern nach Potenzen von $-\frac{\overset{k}{a}}{a^n}$ fortschreiten.

Da es offenbar willkührlich ist, welches Glied der Gleichung man transponiren will, und also, bey vollständiger Durchführung der Arbeit jedes genommen werden kann, so lassen sich auf diese Weise soviele fallende, und ebensoviele steigende Reihen erhalten, als der Grad der Gleichung Einheiten hat. Damit ist freylich keineswegs gesagt, daß jede andre Reihe einen andern Werth von x geben werde, da es im Gegentheil sehr wohl möglich ist, die nemliche Größe durch mehrere, ganz verschiedene Reihen auszudrücken, sobald die eine dieser Reihen eine andre Hauptgröße erhält, nach deren Potenzen sie fortgeht, wie die andre. Es wird vielmehr unter den steigenden und fallenden Reihen insofern einen Unterschied geben, daß die eine von den Wurzeln der Gleichung eine größere oder geringere Zahl, als die andre, ausdrückt. So entsteht z. E. die k^{te} fallende Reihe aus der Umkehrung von

$$ax^k + \overset{1}{a}x^{k-1} .. + \underline{\overset{k}{a}x^0} + \overset{k+1}{a}x^{-1} + .. \overset{n}{a}x^{-(n-k)} = -\overset{k}{a}.$$

Sie schreitet nach Potenzen der Größe $-\overset{k}{a} = y$ fort, und zwar, dem allgemeinen Gesetze der Reversion gemäß, enthält sie in ihrem Anfangsgliede eine Potenz von $-\overset{k}{a}$, deren Exponent $\frac{1}{k}$ seyn wird, in ihren folgen- Gliedern enthält sie Exponenten, die allmälig immer um eine Einheit höher werden. Offenbar aber schließt $y^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{y}$, soviel verschiedene Werthe in sich, als k Einheiten enthält. Eine Reihe also, welche auf die Form $y^{\frac{1}{k}}(A + \overset{1}{A}y + .. \overset{r}{A}y^r ..)$ zurückkommt, gibt, wenn sie in ihrem ganzen Umfange genommen wird, für die Größe, welche sie ausdrücken soll, eben- soviele verschiedene Werthe.

Kommt es folglich nur darauf an, für jede Wurzel einer gegebenen Gleichung eine Reihe zu finden, so ist es hinlänglich, wenn man eine fallende haben will, von der Form der Gleichung das lezte Glied zu transponiren, und also

$$ax^n + \overset{1}{a}x^{n-1} .. + \overset{k}{a}x^{n-k} .. + \overset{n-1}{a}x^1 = -\overset{n}{a}$$

umzukehren: die daraus entstehende Reihe wird in allen ihren Gliedern den Factor $\left(-\overset{n}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ gemeinschaftlich haben, und also, wenn man die n verschiedenen Werthe ent- wickelt, welche er annehmen kann, eben so viele für x darbieten. Will man hingegen steigende Reihen er- halten, so transponire man da erstes Glied der

Gleichung, setze also $\overset{n}{a}x^{-n} + \overset{n-1}{a}x^{-(n-1)} \ldots + \overset{1}{a}x^{-1} = -a$
Die Reihe, welche alsdann, nach Potenzen von a fortgehend, den Werth von x ausdrückt, wird alsdann in allen ihren Gliedern den Factor $(-a)^{-\frac{1}{n}}$ gemeinschaftlich enthalten, und also insofern für das, was sie ausdrücken soll, n verschiedene Werthe darbieten. Man brauchte also eigentlich keine andere Reihen, als diese beyden, um für jede Wurzel der Gleichung sowohl eine steigende, als eine fallende Reihe zu erhalten.

Wenn man aber diese Reihen zur nähernden Berechnung in bestimmten Zahlen gebrauchen will, so muß die nähere Untersuchung, ob sie die gehörige Convergenz besitzen, über ihre Anwendung entscheiden, und kann vielleicht nöthigen, eine von den andern Reihen zu nehmen, welche aus der Transposition andrer Glieder in der gegebenen Form der Gleichung entstehn werden. Ja es kann sogar der Fall seyn, daß jedes einzelne Glied einer solchen Reihe eine unmögliche Größe wird. Wenn die Hauptgröße wonach sie fortschreitet, eine negative Zahl ist, und von ihr eine Potenz, deren Exponent ein Bruch mit geradem Nenner ist, berechnet werden soll, so sind alle Werthe desselben unmögliche Ausdrücke. Es gibt unter den fallenden, und eben so unter den steigenden, nur eine, bey welcher dies nicht der Fall seyn kann; diejenigen nemlich, wobey die nach der Transposition übrig bleibenden Formen mit x^{+1} oder x^{-1} anheben, weil bey ihnen,

der Reversionsformel gemäß keine Potenz, welche einen gebrochenen Exponenten enthielte, zum Vorschein kommen kann.

Alle diese Betrachtungen gestatten und verdienen eine ins Einzelne gehende Ausführung, welche in einer vollständigen Theorie der Gleichungen nicht fehlen darf, hier aber, als Beyspiel von dem Gebrauch der Reversionsformel, nicht an ihrer Stelle seyn würde.

Erste

Die Binomialcoefficienten der ersten

Die Zahlen der nebeneinanderstehenden Columnen ge-
successiven ganzen positiven Potenzen; vertical genommen,
ven ganzen negativen. Die ganze Tabelle pflegt

Pot.	$^{-1}$B	$^{-2}$B	$-^{3}$B	$-^{4}$B	$-^{5}$B	$-^{6}$B	$-^{7}$B	$-^{8}$B
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	3	6	10	15	21	28	36
3	1	4	10	20	35	56	84	120
4	1	5	15	35	70	126	210	330
5	1	6	21	56	126	252	462	792
6	1	7	28	84	210	462	924	1716
7	1	8	36	120	330	792	1716	3432
8	1	9	45	165	495	1287	3003	6435
9	1	10	55	220	715	2002	5005	11440
10	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448
11	1	12	78	364	1365	4368	12376	31824
12	1	13	91	455	1820	6188	18564	50388
13	1	14	105	560	2380	8568	27132	77520
14	1	15	120	680	3060	11628	38760	116280
15	1	16	136	816	3876	15504	54264	170544
16	1	17	153	969	4845	20349	74613	245157
17	1	18	171	1140	5985	26334	100947	346104
18	1	19	190	1330	7315	33649	134596	480700
19	1	20	210	1540	8855	42504	177100	657800
20	1	21	231	1771	10626	53130	230230	888030
21	1	22	253	2024	12650	65780	296010	1184040
22	1	23	276	2300	14950	80730	376740	1560780
23	1	24	300	2600	17550	98280	475020	2035800
24	1	25	325	2925	20475	118755	593775	2629573
25	1	26	351	3276	23751	142506	736281	3365856
26	1	27	378	3654	27405	169911	906192	4282048
27	1	28	406	4060	31465	201376	1107568	5379616
28	1	29	435	4495	35960	237336	1344904	6724520
29	1	30	465	4960	40920	278256	1623160	8347680

Tabelle.

Potenzen mit ganzen Exponenten.

ben, diagonal genommen, die Binomialcoefficienten der
und dabey mit abwechselnden Zeichen, die der successi-
die der figurirten Zahlen genannt zu werden.

−⁹B	−¹⁰B	−¹¹B	−¹²B	−¹³B
1	1	1	1	1
9	10	11	12	13
45	55	66	78	91
165	220	286	364	455
495	715	1001	1365	1820
1287	2002	3003	4368	6188
3003	5005	8008	12376	18564
6435	11440	19448	31824	50388
12870	24310	43758	75582	125970
24310	48620	92378	167960	293930
43758	92378	184756	352716	646646
75582	167960	352716	705432	1352078
125970	293930	646646	1352078	2704156
203490	497420	1144066	2496144	5200300
319770	817190	1961256	4457400	9657700
490314	1307504	3268760	7726160	17383860
735471	2042975	5311735	13037895	30421755
1081575	3124550	8436285	21474180	51895938
5562275	4686825	13123110	34597290	86493225
2220075	6906900	20030010	54627300	141120525
3108105	10015005	30045015	84672315	225792840
4292145	14307150	44352165	129024480	354817320
5852925	20160075	64512240	193530720	548454040
7888725	28048800	92561040	286097760	834451800
10518300	38567100	131128140	417225900	1251677700
13884156	52451256	183579396	600805296	1852482996
18156204	70607460	254186856	854992152	2707475148
23535820	94143280	348330136	1203322288	3910797436
30260340	124403620	472733756	1676056044	5586853480
38608020	163011640	635745396	2311801440	7898654920

Zweyte Tabelle.

Die zehn ersten Glieder einer unbestimmten Potenz eines möglichst allgemein ausgedrückten Polynomiums enthaltend.

$$(ax^{\beta} + bx^{\beta+\delta} + cx^{\beta+2\delta} + \ldots ix^{h+8\delta} + kx^{h+9\delta} + lx^{h+10\delta} \ldots)^{n}$$

$$a^{n}x^{\beta n}$$

$$+ {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1}bx^{\beta n+\delta}$$

$$\left.\begin{array}{l} + {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1}c \\ + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{n-2}b^{2} \end{array}\right| x^{\beta n+2\delta}$$

$$\left.\begin{array}{l} + {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1}d \\ + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{n-2}2bc \\ + {}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}a^{n-3}b^{3} \end{array}\right| x^{\beta n+3\delta}$$

$$\left.\begin{array}{l} + {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1}e \\ + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{n-2}\begin{cases} 2bd \\ c^{2} \end{cases} \\ + {}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}a^{n-3}3b^{2}c \\ + {}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}}a^{n-4}b^{4} \end{array}\right| x^{\beta n+4\delta}$$

$$\left.\begin{array}{l} {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1}f \\ + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{n-2}\begin{cases} 2be \\ 2cd \end{cases} \\ + {}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}a^{n-3}\begin{cases} 3b^{2}d \\ 3bc^{2} \end{cases} \\ + {}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}}a^{n-4}4b^{3}c \\ + {}^{n}\overset{5}{\mathfrak{B}}a^{n-5}b^{5} \end{array}\right| x^{\beta 2+5\delta}$$

$$\left.\begin{array}{l} + {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1}g \\ + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{n-2}\begin{cases} 2bf \\ 2ce \\ d^{2} \end{cases} \\ + {}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}a^{n-3}\begin{cases} 3b^{2}e \\ 6bcd \\ c^{3} \end{cases} \\ + {}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}}a^{n-4}\begin{cases} 4b^{3}d \\ 6b^{2}c^{2} \end{cases} \\ + {}^{n}\overset{5}{\mathfrak{B}}a^{n-5}.\,5b^{4}c \\ + {}^{n}\overset{6}{\mathfrak{B}}a^{n-6}.\,b^{6} \end{array}\right| x^{\beta n+6\delta}$$

$$\left.\begin{array}{l} + {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1}h \\ + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{n-2}\begin{cases} 2bg \\ 2cf \\ 2de \end{cases} \\ + {}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}a^{n-3}\begin{cases} 3b^{2}f \\ 6bce \\ 3bd^{2} \\ 3c^{2}d \end{cases} \\ + {}_{n}\overset{4}{\mathfrak{B}}a^{n-4}\begin{cases} 4b^{3}c \\ 12b^{2}cd \\ 4bc^{3} \end{cases} \\ + {}^{n}\overset{5}{\mathfrak{B}}a^{n-5}\begin{cases} 5b^{4}d \\ 10b^{3}c \end{cases} \\ + {}^{n}\overset{6}{\mathfrak{B}}a^{n-6}.\,6b^{5}c \\ + {}^{n}\overset{7}{\mathfrak{B}}a^{n-7}.\,b^{7} \end{array}\right| x^{\beta n+7\delta}$$

$$
\left.
\begin{matrix}
+\,{}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1}\,i \\
+\,{}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{n-2}\left\{\begin{matrix} 2bh \\ 2cg \\ 2df \\ e^{2} \end{matrix}\right. \\
+\,{}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}a^{n-3}.\left\{\begin{matrix} 3b^{2}g \\ 6bcf \\ 6bde \\ 3c^{2}e \\ 3cd^{2} \end{matrix}\right. \\
+\,{}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}}a^{n-4}\left\{\begin{matrix} 4b^{3}f \\ 12b^{2}ce \\ 6b^{2}d^{2} \\ 12bc^{2}d \\ c^{4} \end{matrix}\right. \\
+\,{}^{n}\overset{5}{\mathfrak{B}}a^{n-5}\left\{\begin{matrix} 5b^{4}e \\ 20b^{3}cd \\ 10b^{2}c^{3} \end{matrix}\right. \\
+\,{}^{n}\overset{6}{\mathfrak{B}}a^{n-6}\left\{\begin{matrix} 6b^{5}d \\ 15b^{4}c^{2} \end{matrix}\right. \\
+\,{}^{n}\overset{7}{\mathfrak{B}}a^{n-7}.\,7b^{6}c \\
+\,{}^{n}\overset{8}{\mathfrak{B}}a^{n-8}.\,b^{8}
\end{matrix}
\right| \; x^{n\beta+8\delta}
$$

$$
\left.
\begin{matrix}
+\,{}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1}k \\
+\,{}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{n-2}\left\{\begin{matrix} 2bi \\ 2ch \\ 2dg \\ 2ef \end{matrix}\right. \\
+\,{}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}a^{n-3}\left\{\begin{matrix} 3b^{2}h \\ 6bcg \\ 6bdf \\ 3be^{2} \\ 3c^{2}f \\ 6cde \\ d^{3} \end{matrix}\right. \\
+\,{}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}}a^{n-4}\left\{\begin{matrix} 4b^{3}g \\ 12b^{2}cf \\ 12b^{2}de \\ 12bc^{2}e \\ 12bcd^{2} \\ 4c^{3}d \end{matrix}\right. \\
+\,{}^{n}\overset{5}{\mathfrak{B}}a^{n-5}\left\{\begin{matrix} 5b^{4}f \\ 20b^{3}ce \\ 10b^{3}d^{2} \\ 30b^{2}c^{2}d \\ 5bc^{4} \end{matrix}\right. \\
+\,{}^{n}\overset{6}{\mathfrak{B}}a^{n-6}\left\{\begin{matrix} 6b^{5}e \\ 30b^{4}cd \\ 20b^{3}c^{3} \end{matrix}\right. \\
+\,{}^{n}\overset{7}{\mathfrak{B}}a^{n-7}\left\{\begin{matrix} 7b^{6}d \\ 21b^{5}c^{2} \end{matrix}\right. \\
+\,{}^{n}\overset{8}{\mathfrak{B}}a^{n-8}.\,8b^{7}c \\
+\,{}^{n}\overset{9}{\mathfrak{B}}a^{n-9}.\,b^{9}
\end{matrix}
\right| \; x^{n\beta+9\delta}
$$

$$
\left.
\begin{matrix}
+\,{}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1}\,l \\
+\,{}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{n-2}\left\{\begin{matrix} 2bk \\ 2ci \\ 2dh \\ 2eg \\ f^{2} \end{matrix}\right. \\
+\,{}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}a^{n-3}\left\{\begin{matrix} 3b^{2}i \\ 6bch \\ 6bdg \\ 6bef \\ 3c^{2}g \\ 6cdf \\ 3ce^{2} \\ 3d^{2}e \end{matrix}\right. \\
+\,{}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}}a^{n-4}\left\{\begin{matrix} 4b^{3}h \\ 12b^{2}cg \\ 12b^{2}df \\ 6b^{2}e^{2} \\ 12bc^{2}f \\ 24bcde \\ 4bd^{3} \\ 4c^{3}e \\ 6c^{2}d^{2} \end{matrix}\right. \\
+\,{}^{n}\overset{5}{\mathfrak{B}}a^{n-5}\left\{\begin{matrix} 5b^{4}g \\ 20b^{3}cf \\ 20b^{3}de \\ 30b^{2}c^{2}e \\ 30b^{2}cd^{2} \\ 30bc^{3}d \\ c^{5} \end{matrix}\right.
\end{matrix}
\right| \; x^{n\beta+10\delta}
$$

$$+{}^{n}\overset{6}{\mathfrak{B}}a^{n-6}\begin{cases}6b^5f\\30b^4ce\\15b^4d^2\\60b^3c^2d\\15b^2c^4\end{cases}\Bigg|\;x^{n\beta+10\delta}\qquad +{}^{n}\overset{8}{\mathfrak{B}}a^{n-8}\begin{cases}8b^7d\\28b^6c^2\end{cases}\Bigg|\;x^{n\beta+10\delta}$$

$$+{}^{n}\overset{7}{\mathfrak{B}}a^{n-7}\begin{cases}7b^6e\\42b^5cd\\70b^4c^3\end{cases}\qquad +{}^{n}\overset{9}{\mathfrak{B}}{}^{n-9}.\,9b^8c\qquad +{}^{n}\overset{10}{\mathfrak{B}}a^{10}.\,b^{10}$$

u. s. w.

Dritte Tabelle.

Zur Umkehrung der Reihen.

Es sey

$ax^\beta + bx^{\beta+\delta} + cx^{\beta+2\delta}\ldots = y^m$, so ist $x^n =$

$$+a^{-\frac{n}{\beta}}.\,x^{\frac{nm}{\beta}}$$

$$+\frac{n}{\beta}\left[.a^{-\frac{(n+\delta+\beta)}{\beta}}.\,b\right]x^{\frac{nm}{\beta}+\frac{m\delta}{\beta}}$$

$$+\frac{n}{\beta}\left(\begin{matrix}-a^{-\frac{(n+2\delta+\beta)}{\beta}}c\\+\frac{(n+2\delta+\beta)}{\beta}.a^{-\frac{(n+2\delta+2\beta)}{\beta}}b^2\end{matrix}\right)x^{\frac{nm}{\beta}+\frac{2m\delta}{\beta}}$$

$$+\frac{n}{\beta}\left\{\begin{matrix}-a^{-\frac{(n+3\delta+\beta)}{\beta}}d\\+\frac{(n+3\delta+\beta)}{\beta}.a^{-\frac{(n+3\delta+2\beta)}{\beta}}.2bc\\-\frac{(n+3\delta+\beta)(\ldots3\delta+2\beta)}{\ldots2.\beta^2}a^{-\frac{(n+3\delta+3\beta)}{\beta}}b^3\end{matrix}\right\}x^{\frac{nm}{\beta}+\frac{3m\delta}{\beta}}$$

$$\frac{n}{\beta}\left\{\begin{array}{l}
-a^{-\frac{(n+4\delta+\beta)}{\beta}}.e \\
+\frac{(n+4\delta+\beta)}{\beta}.a^{-\frac{(n+4\delta+2\beta)}{\beta}}.\left\{\begin{array}{l}2bd\\ c^2\end{array}\right. \\
-\frac{(n+4\delta+\beta)(n+4\delta+2\beta)}{1.2.\beta^2}.a^{-\frac{(n+4\delta+3\beta)}{\beta}}.3b^2c \\
+\frac{(n+4\delta+\beta)..(n+4\delta+3\beta)}{1.2.3.\beta^3}a^{-\frac{(n+4\delta+4\beta)}{\beta}}.b^4
\end{array}\right\}x^{\frac{nm}{\beta}+\frac{4m\delta}{\beta}}$$

$$\frac{n}{\beta}\left\{\begin{array}{l}
-a^{-\frac{(n+5\delta+\beta)}{\beta}}.f \\
-\frac{(n+5\delta+\beta)}{\beta}a^{-\frac{(n+5\delta+2\beta)}{\beta}}.\left\{\begin{array}{l}2be\\ 2cd\end{array}\right. \\
+\frac{(n+5\delta+\beta).(n+5\delta+2\beta)}{1.2.\beta^2}.a^{-\frac{(n+5\delta+3\beta)}{\beta}}.\left\{\begin{array}{l}3b^2d\\ 3bc^2\end{array}\right. \\
-\frac{(n+5\delta+\beta)..(n+5\delta+3\beta)}{1.2.3\beta^3}a^{-\frac{(n+5\delta+4\beta)}{\beta}}.4b^3c \\
+\frac{(n+5\delta+\beta)..(n+5\delta+4\beta)}{1.2.3.4\beta^4}a^{-\frac{(n+5\delta+5\beta)}{\beta}}.b^5
\end{array}\right\}x^{\frac{nm}{\beta}+\frac{5m\delta}{\beta}}$$

u. s. w.

Druckfehler.

pag. 82. in den 4 letzten Zeilen für $-\frac{4}{27}f^3$ lies $+\frac{4}{27}f^3$; f. x l. y; in der letzten für $+\surd$, lies $-\surd$

— 142. Z. 9. v. u. f. $= +p$ l. $= 1 + p$

— 162. — 10. v. u. f. $\overset{k}{C}$ l. $\overset{k+1}{C}$

— 174. — 2. f. $\overset{2}{A}{}^2$ l. $\overset{2}{A}x^2$

— 175. — 3. v. u. f. $\overset{3}{A}{}^3$ l. $\overset{3}{A}x^3$

— 177. — 7. v. u. f. $\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{1}{m}-1\right)$ l. $\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)}{1\,.\,2}$

— 182. — 1. v. u. f. $f\overset{r}{\mathfrak{B}}+x^r$ l. $f\overset{r}{\mathfrak{B}}x^r$

— 186. — 2. f. $f(-1)$ l. $(f-1)$

— 187. — 2. f. $f+g\overset{2}{\mathfrak{B}}$ l. $f+g\overset{3}{\mathfrak{B}}$

— 191. — 10. f. $g-k$ l. $g-k+1$, und ebenso l. 11. f. $(g-k-1)$

— — — 1. v. u. f. $(r-)k$ l. $(r-k)$; f. $f\overset{r-k+1}{\mathfrak{B}}$ l. $f\overset{r-k}{\mathfrak{B}}$

— — — 7. v. u. f. $k+1$ l. $r+1$ und Z. 8. v. u. f. $k+1$ l. k

— 198, 244, 245, 259 gehört neben C noch $\mathfrak{p}$

— 213. — 6. f. $(2n-2)$ l. $(2n-1)$

— — — 7. f. $(2n-3)$ l. $(2n-2)$

— 222. — 1. v. u. f. (x^{-2}) l. $(x-2)$

— 249. — 7. v. u. gehört k über f

— 264. — 7. v. u. f. $\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}$ l. $\frac{y^5}{5}+\frac{y^7}{7}$

— 266. — 9. f. $+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2$ l. $-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2$

— 280. — 2. f. $2n-1$ l. $2n+1$

— 282. — 7. für die Zeichen $-$, $-$, $+$ zu setzen $-$, $+$, $-$

— 297. — 5. f. ea l. ea

— 298. — 6. v. u. f. $2n1\pi\surd-$ l. $2n\pi\surd-1$

— 301. — 7. v. u. f. cos a l. cos b

— 307. — 7. f. $b)\surd-1$ l. $b\surd-1)$

— 319. — 9. v. u. f. $\surd$ l. $\sqrt[m]{}$

— 328. — 10. v. u. f. $B\sqrt[3]{}$ l. $\sqrt[3]{B}$

— 330. — 5. v. u. f. $\frac{g}{2}$ l. $-\frac{g}{2}$

— 331. — 2. f. $(\frac{1}{3}f^3)$ l. $(\frac{1}{3}f)^3$

— 333. — 2. f. $\surd(\frac{1}{3}f)$ l. $\surd(-\frac{1}{3}f)$

— 334. — 7. v. u. f. x^3 l. x^4

— 344. — 9. v. u. l. nach $=$, $a\frac{p}{q}$

— 352. — 7. f. $ka\delta$ l. $ra\delta$

— — — 9. del. $a+k\delta$

— — — 14. f. A^k l. $\overset{k}{A}$

— 359. — 9. f. F^1, F^2, F^3, F, l. F, F^1, F^2, F^3

— 363. — 11. v. u. f. $\overset{3}{\mathfrak{Z}}$ l. $\overset{r}{\mathfrak{Z}}$

— 395. — 10. v. u. f. $\underset{k}{4}$ l. $+$

— 409 — 9 f. $-a =$ l. $= -\overset{k}{a}$

